Линейная алгебра, Экзамен II

Бобень Вячеслав, Лоптев Сергей, Казанцев Даниил
@darkkeks, @beast_sl, @vserosbuybuy, GitHub
Благодарность выражается Левину Александру (@azerty1234567890)
и Милько Андрею (@andrew_milko) за видеозаписи лекций.

Дата изменения: 2020.09.01 в 20:41
2019 — 2020

Содержание

1 Определения и формулировки

1. **Сумма двух подпространств векторного пространства**

   Пусть V – векторное пространство над F.

   $U, W \subseteq V$ – подпространства.

   Определение. *Суммой* подпространств U, W называется множество

   $$U + W := \{u + w \mid v \in U, w \in W\}.$$

2. **Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения**

   Теорема. $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

   Пример. Всякие две плоскости в $\mathbb{R}^3$ (содержащие 0) имеют общую прямую.

   Здесь $V = \mathbb{R}^3$, $\dim U = 2$, $\dim W = 2$.

   При этом $\dim(U + W) \leqslant 3$.

   Тогда, $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geqslant 2 + 2 - 3 = 1$.

3. **Сумма нескольких подпространств векторного пространства**

   Пусть $U_1, \dots U_k \subseteq V$ – подпространства.

   Определение. *Суммой* подпространств $U_1, \dots U_k$ называется множество

   $$U_1 + \dots + U_k = \{u_1 + \dots + u_k \mid u_i \in U_i\}.$$

   Замечание. $\dim(U_1 + \dots + U_k) \leqslant \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.

4. **Линейная независимость нескольких подпространств векторного пространства**

   Определение. Подпространства $U_1, \dots, U_k$ называются *линейно независимыми*, если $\forall u_1 \in U_1, \dots, u_k \in U_k$ из условия $u_1 + \dots + u_k = 0$ следует $u_1 = \dots = u_k = 0$.

   Пример. Если $\dim U_i = 1$ и $U_i = \langle u_i \rangle\ \forall i$, то $U_1, \dots, U_k$ линейно независимы $\iff$ $u_1, \dots, u_k$ линейно независимы.

5. **Разложение векторного пространства в прямую сумму подпространств**

   Определение. Говорят, что векторное пространство V разлагается в *прямую сумму* $U_1, \dots, U_k$, если

   1. $V = U_1 + \dots + U_k$,
   2. $U_1, \dots, U_k$ линейно независимы.

   Обозначение: $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$.

   Пример. Если $e_1, \dots, e_n$ – базис V, то $V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle$

6. **При каких условиях на подпространства U_1, U_2 векторного пространства V имеет место разложение $V = U_1 \oplus U_2$?**

   $$V = U_1 \oplus U_2 \iff \begin{cases} V = U_1 + U_2, \\ U_1 \cap U_2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \dim V = \dim U_1 + \dim U_2, \\ U_1 \cap U_2 = 0. \end{cases}$$

7. **Проекция вектора на подпространство вдоль дополнительного подпространства**

   Замечание. $V = U_1 \oplus U_2 \implies \forall v \in V\ \exists! u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$, такие что $v = u_1 + u_2$.

   Тогда, u_1 называется проекцией вектора v на U_1 вдоль U_2.

   Так же, u_2 называется проекцией вектора v на U_2 вдоль U_1.

8. **Матрица перехода от одного базиса векторного пространства к другому**

   Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ и $(e'_1, \dots, e'_n)$ — два базиса в V,

   $$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C,$$

   при этом $\det C \neq 0$.

   Определение. Матрица C называется *матрицей перехода* от базиса $(e_1, \dots, e_n)$ к базису $(e'_1, \dots, e'_n)$.

   Замечание. Матрица перехода от $(e'_1, \dots, e'_n)$ к $(e_1, \dots, e_n)$ — это C^{-1}.

9. Формула преобразования координат вектора при замене базиса

Пусть C — матрица перехода от базиса $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ к базису $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$, $v \in V$, тогда

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$
$$v = x'_1 e'_1 + \cdots + x'_n e'_n.$$

Предложение.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

10. Линейное отображение векторных пространств, его простейшие свойства

Пусть V, W — векторные пространства над F.

Определение. Отображение $\varphi\colon V \to W$ называется *линейным*, если

1. $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$,
2. $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$.

$\forall v_1, v_2, v \in V$, $\forall \lambda \in F$.

Простейшие свойства

1. $\varphi(\overrightarrow{0_V}) = \overrightarrow{0_W}$.
2. $\varphi(-v) = -\varphi(v)$.

11. Изоморфизм векторных пространств, изоморфные векторные пространства

Определение. Отображение $\varphi\colon V \to W$ называется *изоморфизмом* если оно линейно и биективно.

Обозначение: $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} W$.

Определение. Два векторных пространства V, W называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} W$.

Обозначается: $V \simeq W$ (либо $V \cong W$).

12. Какими свойствами обладает отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств?

Теорема. *Отношение изоморфности является отношением эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем F.*

13. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

Теорема. *Пусть V, W — два конечномерных векторных пространства над F.*

Тогда, $V \simeq W \iff \dim V = \dim W$.

14. Матрица линейного отображения

Пусть V, W — векторные пространства над F.

$\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V,

$\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W.

Пусть $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение.

$\forall j = 1, \ldots, n$

$$\varphi(e_j) = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \cdots + a_{mj} f_m = (f_1, \ldots, f_m) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Тогда, $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (f_1, \ldots, f_m) \cdot A$, где $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F)$.

Определение. A называется матрицей линейного отображения φ в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$.

Обозначение: $A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.

В j-м столбце матрицы A стоят координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{f}$.

15. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении

Предложение. Пусть $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение,

$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V,

$\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W,

$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.

$v \in V \implies v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$

$\qquad\qquad \varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m.$

Тогда,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

16. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов

Пусть $\mathbb{e}'$ — другой базис в V, $\mathbb{f}'$ — другой базис в W.

$\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C_{\in M_n},$

$\mathbb{f}' = \mathbb{f} \cdot D_{\in M_m}.$

$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}),$

$A' = A(\varphi, \mathbb{e}', \mathbb{f}').$

Предложение. $A' = D^{-1} A C$.

17. Сумма двух линейных отображений и её матрица. Произведение линейного отображения на скаляр и его матрица

Пусть $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(V, W)$, $\lambda \in F$.

Определение.

1. *Суммой* линейных отображений φ и ψ называется линейное отображение $\varphi + \psi \in \operatorname{Hom}(V, W)$, такое что $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$.
2. Произведение φ на λ — это линейное отображение $\lambda\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W)$, такое что $(\lambda\varphi)(v) := \lambda\varphi(v)$.

Зафиксируем базисы $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в V и $\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ в W.

Предложение.

1. $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(V, W)$, $A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$
   $A_\psi = A(\psi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$
   $A_{\varphi+\psi} = A(\varphi + \psi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \quad \implies A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$
2. $\lambda \in F, \varphi \in \operatorname{Hom}(V, W)$, $A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$
   $A_{\lambda\varphi} = A(\lambda\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \quad \implies A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$

18. Композиция двух линейных отображений и её матрица

Пусть $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$ — цепочка линейных отображений, а $\varphi \circ \psi : U \to W$ — их композиция,

$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V,

$\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W,

$\mathbb{g} = (g_1, \dots, g_k)$ — базис U.

$A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}),$

$A_\psi = A(\psi, \mathbb{g}, \mathbb{e}),$

$A_{\varphi\circ\psi} = A(\varphi \circ \psi, \mathbb{g}, \mathbb{f}).$

Тогда, $A_{\varphi\circ\psi} = A_\varphi \cdot A_\psi$.

19. Ядро и образ линейного отображения. Являются ли они подпространствами в соответствующих векторных пространствах?

Пусть $\varphi\colon V \to W$.

Определение. *Ядро* линейного отображения φ — это $\ker\varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$.

Образ линейного отображения φ — это $\operatorname{Im}\varphi := \varphi(V) \subseteq W$.

Предложение.

1. Ядро — подпространство в V.
2. Образ — подпространство в W.

20. Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра Пусть V, W — векторные пространства над F,

$\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение.

Предложение.

(a) φ инъективно $\iff \ker\varphi = \{0\}$,

(b) φ сюръективно $\iff \operatorname{Im}\varphi = W$.

21. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V,
$\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W,
$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.

Теорема. $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im}\varphi$.

Замечание. Число $\dim\operatorname{Im}\varphi$ называется *рангом* линейного отображения φ, обозначается $\operatorname{rk}\varphi$.

Следствие. $\operatorname{rk} A$ не зависит от выбора пары базисов $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$.

22. Каким свойством обладает набор векторов, дополняющих базис ядра линейного отображения до базиса всего пространства?

Предложение. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — базис $\ker\varphi$ и векторы $e_{k+1}, \ldots, e_n$ дополняют его до базиса всего V.

Тогда, $\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)$ образуют базис в $\operatorname{Im}\varphi$.

23. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения

Теорема. $\dim\operatorname{Im}\varphi + \dim\ker\varphi = \dim V$.

24. К какому простейшему виду можно привести матрицу линейного отображения путём замены базисов?

Предложение. Пусть $\operatorname{rk}\varphi = r$. Тогда существует базис $\mathbb{e}$ в V и базис $\mathbb{f}$ в W, такие что

$$A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{array}{c} \\ r \\ \\ \\ \\ m-r \\ \\ \end{array} \overset{\qquad r \qquad\qquad\qquad n-r}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

25. Линейная функция на векторном пространстве

Определение. *Линейной функцией* (или *линейной формой*, или *линейным функционалом*) на V называется всякое линейное отображение $\alpha\colon V \to F$.

Обозначение. $V^* := \operatorname{Hom}(V, F)$ — множество всех линейных функций на V.

26. Сопряжённое (двойственное) векторное пространство и его размерность

Из общей теории линейных отображений:

1. V^* — векторное пространство (оно называется *сопряженным* или *двойственным*).
2. Если $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — фиксированный базис в V, то есть изоморфизм $V^* \simeq \operatorname{Mat}_{1\times n}(F)$ (а это ни что иное, как строки длины n).
   $\alpha \to (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
   $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$
   $\alpha(v) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1x_1 + \cdots + \alpha_nx_n.$
   $\alpha_i = \alpha(e_i)$ — коэффициенты линейной функции α в базисе $\mathbb{e}$.

Следствие. $\dim V^* = \dim V$ ($\implies V^* \simeq V$).

27. Базис сопряжённого пространства, двойственный к данному базису исходного векторного пространства

При $i = 1, \dots, n$ рассмотрим линейную функцию $\varepsilon_i \in V^*$, соответствующую строке $(0 \dots 1 \dots 0)$. Тогда $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — базис V^*, он однозначно определяется условием $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$. ($\delta_{ij}$ — символ Кронекера)

Определение. Базис $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ пространства V^*, определенный условием выше, называется базисом, *двойственным* (сопряженным) к базису $\mathbb{e}$.

Удобная запись условия:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = E.$$

28. Билинейная форма на векторном пространстве

Пусть V — векторное пространство над F.

Определение. *Билинейная форма* на V — это отображение $\beta \colon V \times V \to F$, линейное по каждому аргументу.

Линейность по 1-му аргументу

- $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y) \quad \forall x_1, x_2, y \in V$,
- $\beta(\lambda x, y) = \lambda\beta(x, y) \quad \forall x, y \in V,\ \lambda \in F$.

Линейность по 2-му аргументу

- $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2) \quad \forall x, y_1, y_2 \in V$,
- $\beta(x, \lambda y) = \lambda\beta(x, y) \quad \forall x, y \in V,\ \lambda \in F$.

29. Матрица билинейной формы

Считаем, что $\dim V = n < \infty$.

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V.

Определение. Матрицей билинейной формы β в базисе $\mathbb{e}$ называется такая матрица $B \in M_n$, что $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$.

Обозначение: $B(\beta, \mathbb{e})$.

30. Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах

Пусть $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$,
$y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$.

Тогда,

$$\beta(x, y) = (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

31. Формула изменения матрицы билинейной формы при замене базисов

$B = B(\beta, \mathbb{e})$.

Пусть $\mathbb{e}' = (e'_1, \dots e'_n)$ — другой базис V.

$\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C$.

$B' := B(\beta, \mathbb{e}')$.

Предложение. $B' = C^T B C$.

32. Симметричная билинейная форма. Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы

Определение. Билинейная форма β называется *симметричной*, если $\beta(x, y) = \beta(y, x)\ \forall x, y \in V$.

Пусть $\mathbb{e}$ — произвольный базис V.

Предложение. β симметрична $\iff B = B^T$.

33. Квадратичная форма

Пусть $\beta\colon V \times V \to F$ — билинейная форма на V.

Определение. Отображение $Q_\beta\colon V \to F$, $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$, называется *квадратичной формой*, ассоциированной с билинейной формой β.

Пусть $\mathbb{e}$ — базис V, $x = x_1e_1 + \ldots x_ne_n$, $B = B(\beta, \mathbb{e})$.

Тогда,

$$Q_\beta(x) = (x_1 \ldots x_n)B \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} (b_{ij} + b_{ji})x_ix_j.$$

34. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

Предложение. Пусть в поле F выполнено условие $1 + 1 \neq 0$ (то есть $2 \neq 0$). Тогда отображение $\beta \mapsto Q_\beta$ является биекцией между симметричными билинейными формами на V и квадратичным формами на V.

35. Симметризация билинейной формы

Билинейная форма $\sigma(x, y) = \frac{1}{2}\left(\beta(x, y) + \beta(y, x)\right)$ называется *симметризацией* билинейной формы β.

Если B и S — матрицы билинейных форм β и σ в некотором базисе, то $S = \frac{1}{2}(B + B^T)$.

36. Поляризация квадратичной формы

Симметричная билинейная форма $\beta(x, y) = \frac{1}{2}\left[Q(x + y) - Q(x) - Q(y)\right]$ называется *поляризацией* квадратичной формы Q.

37. Матрица квадратичной формы

Определение. Матрицей квадратичной формы Q в базисе $\mathbb{e}$ называется матрица соответствующей симметричной билинейной формы (поляризации) в базисе $\mathbb{e}$.

Обозначение: $B(Q, \mathbb{e})$.

Пример. Пусть $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$.

Если $\mathbb{e}$ — стандартный базис, то $B(Q, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

38. Канонический вид квадратичной формы

Определение. Квадратичная форма Q имеет в базисе $\mathbb{e}$ *канонический вид*, если $B(Q, \mathbb{e})$ диагональна.

Если $B(Q, \mathbb{e}) = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, то $Q(x_1, \ldots, x_n) = b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + \cdots + b_nx_n^2$.

39. Нормальный вид квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Определение. Квадратичная форма над $\mathbb{R}$ имеет *нормальный вид* в базисе $\mathbb{e}$, если в этом базисе

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \varepsilon_1x_1^2 + \cdots + \varepsilon_nx_n^2,$$

где $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$.

40. Индексы инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть $F = \mathbb{R}$.

Пусть $Q\colon V \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма.

Можно привести к нормальному виду

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_{s+t}^2.$$

Здесь $i_+ := s$ — положительный индекс инерции квадратичной формы Q,
$i_- := t$ — отрицательный индекс инерции квадратичной формы Q.

41. Закон инерции для квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Теорема. *Числа i_+ и i_- не зависят от базиса в котором Q принимает нормальный вид.*

42. Положительно/неотрицательно определённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$

43. Отрицательно/неположительно определённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$

44. Неопределённая квадратичная форма над $\mathbb{R}$

Определение. Квадратичная форма Q над $\mathbb{R}$ называется

Термин	Обозначение	Условие	Нормальный вид	Индексы инерции
Положительно определённой	$Q > 0$	$Q(x) > 0\ \forall x \neq 0$	$x_1^2 + \dots + x_n^2$	$i_+ = n, i_- = 0$
Отрицательно определённой	$Q < 0$	$Q(x) < 0\ \forall x \neq 0$	$-x_1^2 - \dots - x_n^2$	$i_+ = 0, i_- = n$
Неотрицательно определённой	$Q \geqslant 0$	$Q(x) \geqslant 0\ \forall x$	$x_1^2 + \dots + x_k^2,\ k \leqslant n$	$i_+ = k, i_- = 0$
Неположительно определённой	$Q \leqslant 0$	$Q(x) \leqslant 0\ \forall x$	$-x_1^2 - \dots - x_k^2,\ k \leqslant n$	$i_+ = 0, i_- = k$
Неопределённой	—	$\exists x : Q(x) > 0$ $\exists y : Q(y) < 0$	$x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - x_{s+t}^2$ $s, t \geqslant 1$	$i_+ = s, i_- = t$

45. Способ нахождения индексов инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$, вытекающий из метода Якоби

Пусть $Q\colon V \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма,

$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис,

$B = B(Q, \mathbb{e})$,

δ_k — k-й угловой минор матрицы B.

Следствие (из метода Якоби)**.** Пусть $\delta_k \neq 0\ \forall k$. Тогда:

Число i_+ равно количеству сохранений знака в последовательности $1, \delta_1, \dots, \delta_n$.

Число i_- равно количеству перемен знака в последовательности $1, \delta_1, \dots, \delta_n$.

46. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$, $\dim V = n$,

$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V,

$B = B(Q, \mathbb{e})$,

B_k — левый верхний $k \times k$ блок,

$\delta_k = \det B_k$.

Теорема (Критерий Сильвестра положительной определенности)**.**

$$Q > 0 \iff \delta_k > 0\ \forall k = 1 \dots n.$$

47. Критерий отрицательной определённости квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Следствие.

$$Q < 0 \iff \delta_k \begin{cases} > 0 & \text{при } k \,\vdots\, 2, \\ < 0 & \text{при } k \not\vdots\, 2. \end{cases}$$

48. Евклидово пространство

Определение. *Евклидово пространство* — это векторное пространство $\mathbb{E}$ над $\mathbb{R}$, на котором задано *скалярное произведение*, то есть такое отображение $(\bullet, \bullet)\colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, что

1. $(\bullet, \bullet)$ — симметричная билинейная форма,
2. Квадратичная форма (x, x) положительно определённая.

49. Длина вектора в евклидовом пространстве

Определение. *Длина* вектора $x \in \mathbb{E}$ — это $|x| := \sqrt{(x, x)}$.

Свойство: $|x| \geqslant 0$, причем $|x| = 0 \iff x = 0$.

Пример. Если $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, то $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

50. Неравенство Коши–Буняковского

Предложение (неравенство Коши-Буняковского)**.** $\forall x, y \in \mathbb{E}$ верно $|(x, y)| \leqslant |x| \cdot |y|$, причём равенство $\iff$ x, y пропорциональны.

Пример. Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, тогда

$$|x_1y_1 + \dots + x_ny_n| \leqslant \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}.$$

51. Угол между ненулевыми векторами евклидова пространства

Пусть $x, y \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$, тогда $-1 \leqslant \dfrac{(x,y)}{|x| \cdot |y|} \leqslant 1$.

Определение. Угол между ненулевыми векторами $x, y \in \mathbb{E}$, это такой $\alpha \in [0, \pi]$, что $\cos\alpha = \dfrac{(x,y)}{|x| \cdot |y|}$.

Тогда $(x, y) = |x||y| \cos\alpha$.

52. Матрица Грама системы векторов евклидова пространства

Пусть $v_1, \dots, v_k$ — произвольная система векторов.

Определение. *Матрица Грама* этой системы — это

$$G(v_1, \dots, v_k) = \begin{pmatrix} (v_1,v_1) & (v_1,v_2) & \dots & (v_1,v_k) \\ (v_2,v_1) & (v_2,v_2) & \dots & (v_2,v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_k,v_1) & (v_k,v_2) & \dots & (v_k,v_k) \end{pmatrix}.$$

Пример. $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.

$a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow A := (a_1, \dots, a_k) \in \mathrm{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$.

Тогда, $G(a_1, \dots, a_k) = A^T \cdot A$.

53. Свойства определителя матрицы Грама

Предложение. $\forall v_1, \dots, v_k \in \mathbb{E} \implies \det G(v_1, \dots, v_k) \geqslant 0$.

Более того, $\det G(v_1, \dots, v_k) > 0 \iff v_1, \dots, v_k$ линейно независимы.

54. Ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства

Определение. *Ортогональное дополнение* множества $S \subseteq \mathbb{E}$ — это множество $S^\perp := \{x \in \mathbb{E} \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in S\}$.

55. Чему равна размерность ортогонального дополнения к подпространству евклидова пространства?

Пусть $\dim \mathbb{E} = n$, $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство.

Тогда, $\dim S^\perp = n - \dim S$.

56. Каким свойством обладают подпространство евклидова пространства и его ортогональное дополнение?

Считаем, что $\dim \mathbb{E} = n < \infty$.

Предложение. Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство. Тогда:

1. $\dim S^\perp = n - \dim S$.
2. $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$.
3. $(S^\perp)^\perp = S$.

57. Ортогональная проекция вектора на подпространство

$\Downarrow$

58. Ортогональная составляющая вектора относительно подпространства

S — подпространство $\implies \mathbb{E} = S \oplus S^\perp$

$\forall v \in \mathbb{E} \exists! x \in S, y \in S^\perp$, такие что $x + y = v$.

Определение.

1. x называется *ортогональной проекцией* вектора v на подпространство S.
   Обозначение: $x = \mathrm{pr}_S\, v$.
2. y называется *ортогональной составляющей* вектора v относительно подпространства S.
   Обозначение: $y = \mathrm{ort}_S\, v$.

59. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$, заданное своим базисом

Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.

$S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $a_1, \dots, a_k$ — базис S.

Пусть $A := (a_1, \dots, a_k) \in \mathrm{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$, $A^{(i)} = a_i$.

Предложение. $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \mathrm{pr}_S\, v = A(A^T A)^{-1} A^T v$.

60. Ортогональная система векторов евклидова пространства. Ортогональный базис

$\Downarrow$

61. Ортонормированная система векторов евклидова пространства. Ортонормированный базис

Определение. Система ненулевых векторов $v_1, \dots, v_k$ называется

1. *ортогональной*, если $(v_i, v_j) = 0\ \forall i \neq j$ (то есть $G(v_1, \dots, v_k)$ диагональна),
2. *ортонормированной*, если $(v_i, v_j) = 0\ \forall i \neq j$ и $(v_i, v_i) = 1$ ($\iff |v_i| = 1$). То есть $G(v_1, \dots, v_k) = E$.

Замечание. Всякая ортогональная (и в частности ортонормированная) система векторов автоматически линейно независима.

$$\det G(v_1, \dots, v_k) = |v_1|^2 \cdot |v_2|^2 \cdots |v_k|^2 \neq 0.$$

Определение. Базис пространства называется *ортогональным* (соответственно *ортонормированным*), если он является ортогональной (ортонормированной) системой векторов.

62. Описание всех ортонормированных базисов евклидова пространства в терминах одного такого базиса и матриц перехода

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонормированный базис в E.

Пусть $\mathbb{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — какой-то другой базис.

$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$, $C \in M_n^0(\mathbb{R})$.

Предложение. $\mathbb{e}'$ — ортонормированный базис $\iff C^T \cdot C = E$.

63. Ортогональная матрица

Определение. Матрица $C \in M_n(\mathbb{R})$ называется *ортогональной* если $C^T C = E$.

Замечание. $C^T C = E \iff CC^T = E \iff C^{-1} = C^T$.

Свойства.

1. $C^T C = E \implies$ система столбцов $C^{(1)}, \dots, C^{(n)}$ — это ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$,
2. $CC^T = E \implies$ система строк $C_{(1)}, \dots, C_{(n)}$ — это тоже ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$,

В частности, $|c_{ij}| \leqslant 1$.

3. $\det C = \pm 1$.

Пример. $n = 2$. Ортогональный матрицы:

$$\underset{\det = 1}{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}} \qquad \underset{\det = -1}{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}}.$$

64. Формула для координат вектора в ортогональном и ортонормированном базисах евклидова пространства

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $(e_1, \dots, e_n)$ — ортогональный базис.

$v \in \mathbb{E}$.

Предложение. $v = \dfrac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 + \dfrac{(v, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 + \dots + \dfrac{(v, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n$.

В частности, если $e_1, \dots, e_n$ ортонормирован, то $v = (v, e_1) e_1 + \dots + (v, e_n) e_n$.

65. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса

Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство.

$e_1, \dots, e_k$ — ортогональный базис в S.

Предложение. $\forall v \in \mathbb{E} \quad \operatorname{pr}_S v = \sum_{i=1}^k \dfrac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$.

В частности, если $e_1, \ldots, e_k$ ортонормирован, то $\operatorname{pr}_S v = \sum_{i=1}^k (v, e_i) e_i$.

66. Метод ортогонализации Грама–Шмидта

Как построить ортогональный (ортонормированный) базис в $\mathbb{E}$?

Если $f_1, \ldots, f_n$ — ортогональный базис, то $\left(\frac{f_1}{|f_1|}, \ldots, \frac{f_n}{|f_n|}\right)$ — ортонормированный базис.

Тогда, достаточно построить ортогональный базис.

Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — линейно независимая система векторов.

i-й угловой минор в $G(e_1, \ldots, e_k)$ — это $\det G(e_1, \ldots, e_i) > 0$.

Следовательно, применим метод Якоби:

$\exists!$ система векторов $f_1, \ldots, f_k$, такая что

$$\begin{aligned}
&f_1 = e_1, \\
&f_2 \in e_2 + \langle e_1 \rangle, \\
&f_3 \in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle, \\
&\ldots, \\
&f_k \in e_k + \langle e_1, \ldots, e_{k-1} \rangle
\end{aligned}$$

И выполнены следующие свойства $\forall i = 1, \ldots, k$:

0. $f_1, \ldots, f_i$ ортогональны.
1. $\langle e_1, \ldots, e_i \rangle = \langle f_1, \ldots, f_i \rangle$.
2. $f_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \dfrac{(e_i, f_j)}{(f_j, f_j)} f_j \ (\star)$.
3. $\det G(e_1, \ldots, e_i) = \det G(f_1, \ldots, f_i) \ (\heartsuit)$.

Построение базиса $f_1, \ldots, f_k$ по формулам $(\star)$ называется методом (процессом) ортогонализации Грамма-Шмидта.

67. Теорема Пифагора в евклидовом пространстве

Теорема. *Пусть* $x, y \in \mathbb{E}$, $(x, y) = 0$. *Тогда* $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

68. Расстояние между векторами евклидова пространства

Определение. *Расстояние* между векторами $x, y \in \mathbb{E}$ — это $\rho(x, y) = |x - y|$.

69. Неравенство треугольника в евклидовом пространстве

Предложение. $\forall a, b, c \in \mathbb{E} \implies \rho(a, b) + \rho(b, c) \geqslant \rho(a, c)$.

70. Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей

Теорема. *Пусть* $x \in \mathbb{E}$, $S \subseteq \mathbb{E}$ — *подпространство. Тогда,* $\rho(x, S) = |\operatorname{ort}_S x|$, *причем* $\operatorname{pr}_S x$ — *это ближайший к* x *вектор из* S.

71. Псевдорешение несовместной системы линейных уравнений

СЛУ $Ax = b$, $A \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

$$x_0 \text{ — решение системы} \iff Ax_0 = b \iff Ax_0 - b = 0 \iff |Ax_0 - b| = 0 \iff \rho(Ax_0, b) = 0.$$

Если СЛУ несовместна, то x_0 называется *псевдорешением*, если $\rho(Ax_0, b)$ минимально.

$$\rho(Ax_0, b) = \min_{x \in R^n} \rho(Ax, b).$$

x_0 — решение задачи оптимизации $\rho(Ax, b) \xrightarrow[x \in \mathbb{R}^n]{} \min$.

Если столбцы $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$ линейно независимы, то псевдорешение единственно и может быть найдено по формуле $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$.

72. Формула для расстояния от вектора до подпространства в терминах матриц Грама

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $\dim \mathbb{E} = n < \infty$.

$S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $e_1, \ldots, e_k$ — базис в S.

Теорема. $\forall x \in \mathbb{E} \quad \rho(x, S)^2 = \dfrac{\det G(e_1, \ldots, e_k, x)}{\det G(e_1, \ldots, e_k)}$.

73. k-мерный параллелепипед и его объём

Определение. *k-мерный параллелепипед*, натянутый на векторы $a_1, \ldots, a_k$, это множество

$$P(a_1, \ldots, a_k) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i a_i \middle| 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \right\}.$$

Основание: $P(a_1, \ldots, a_{k-1})$.

Высота: $h := \left|\operatorname{ort}_{\langle a_1, \ldots, a_{k-1} \rangle} a_k\right|$.

Определение. *k-мерный объем* k-мерного параллелепипеда $P(a_1, \ldots, a_k)$ — это величина $\operatorname{vol} P(a_1, \ldots, a_k)$, определяемая индуктивно:

$k = 1 \implies \operatorname{vol} P(a_1) := |a_1|$.

$k > 1 \implies \operatorname{vol} P(a_1, \ldots, a_k) := \operatorname{vol} P(a_1, \ldots, a_{k-1}) \cdot h$.

74. Формула для объёма k-мерного параллелепипеда в n-мерном евклидовом пространстве

Теорема. $\operatorname{vol} P(a_1, \ldots, a_k)^2 = \det G(a_1, \ldots, a_k)$.

75. Формула для объёма n-мерного параллелепипеда в n-мерном евклидовом пространстве в терминах координат в ортонормированном базисе

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис в $\mathbb{E}$,

$(a_1, \ldots, a_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot A$, $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Предложение. $\operatorname{vol} P(a_1, \ldots, a_n) = |\det A|$.

76. В каком случае два базиса евклидова пространства называются одинаково ориентированными?

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ и $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — два базиса в $\mathbb{E}$.

$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C$, $C \in M_n^0(\mathbb{R})$.

Определение. Говорят, что $\mathbb{e}$ и $\mathbb{e}'$ одинаково ориентированы, если $\det C > 0$.

77. Ориентированный объём n-мерного параллелепипеда в n-мерном евклидовом пространстве

Фиксируем ориентацию в $\mathbb{E}$.

Фиксируем положительно ориентированный ортонормированный базис $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ в $\mathbb{E}$.

Пусть $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{E}$, $(a_1, \ldots, a_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot A$.

Определение. *Ориентированным объемом* параллелепипеда $P(a_1, \ldots, a_n)$ называется величина

$$\operatorname{Vol}(a_1, \ldots, a_n) = \det A.$$

78. Свойства ориентированного объёма n-мерного параллелепипеда в n-мерном евклидовом пространстве

1. $\operatorname{Vol}(a_1, \ldots, a_n)$ линеен по каждому аргументу.
2. $\operatorname{Vol}(a_1, \ldots, a_n)$ кососимметрична (то есть меняет знак при перестановке любых двух аргументов).
3. $\operatorname{Vol}(a_1, \ldots, a_n) > 0 \iff (a_1, \ldots, a_n)$ — положительно ориентированный базис в $\mathbb{E}$.
4. $\operatorname{Vol}(a_1, \ldots, a_n) < 0 \iff (a_1, \ldots, a_n)$ — отрицательно ориентированный базис в $\mathbb{E}$.
5. $\operatorname{Vol}(a_1, \ldots, a_n) = 0 \iff (a_1, \ldots, a_n)$ линейно зависимы.

79. Связь векторного произведения со скалярным и ориентированным объёмом

Если $v = [a, b]$, то $(v, x) = \operatorname{Vol}(a, b, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$.

80. Формула для вычисления векторного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе

Если $\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$ — положительно ориентированный базис и $\begin{aligned} a &= a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, \text{ то} \\ b &= b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \end{aligned}$

$$[a, b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3.$$

81. Смешанное произведение векторов трёхмерного евклидова пространства

Определение. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^3$ число $(a, b, c) := ([a, b], c)$ называется *смешанным произведением* векторов a, b, c.

Замечание. $(a, b, c) = \mathrm{Vol}(a, b, c)$.

82. Формула для вычисления смешанного произведения в терминах координат в положительно ориентированном ортонормированном базисе

Если e_1, e_2, e_3 — положительно ориентированный ортонормированный базис, то

$$\left.\begin{aligned} a &= a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ b &= b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \\ c &= c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 \end{aligned}\right| \implies (a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

83. Критерий компланарности трёх векторов трёхмерного евклидова пространства

a, b, c компланарны $\iff$ $(a, b, c) = 0$.

84. Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства

Предложение. $a, b \in \mathbb{E}$ коллинеарны $\iff$ $[a, b] = 0$.

85. Геометрические свойства векторного произведения

Предложение.

1. $[a, b] \perp \langle a, b \rangle$.
2. $|[a, b]| = \mathrm{vol}\, P(a, b)$.
3. $\mathrm{Vol}(a, b, [a, b]) \geqslant 0$.

86. Линейное многообразие. Характеризация линейных многообразий как сдвигов подпространств

Определение. *Линейное многообразие* в $\mathbb{R}^n$ — это множество решений некоторой совместной СЛУ.

Пусть $Ax = b$ — СЛУ, $\varnothing \neq L \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество решений, $x_z \in L$ — частное решение.

Было: Лемма: $L = x_z + S$, где S — множество решений ОСЛУ $Ax = 0$.

Предложение. Множество $L \subseteq \mathbb{R}^n$ является линейны многообразием $\iff$ $L = v_0 + S$ для некоторых $v_0 \in \mathbb{R}^n$ и подпространства $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

87. Критерий равенства двух линейных многообразий. Направляющее подпространство и размерность линейного многообразия

Предложение. Пусть $L_1 = v_1 + S_1$ и $L_2 = v_2 + S_2$ — два линейных многообразия в $\mathbb{R}^n$. Тогда,

$$L_1 = L_2 \iff \begin{cases} S_1 = S_2 \ (= S) \\ v_1 - v_2 \in S \end{cases}.$$

Если L — линейное многообразие, то $L = v_0 + S$, где S определено однозначно.

Определение. S называется *направляющим подпространством* линейного многообразия L.

Определение. *Размерностью* линейного многообразия называется размерность его направляющего подпространства.

88. Теорема о плоскости, проходящей через $k + 1$ точку в $\mathbb{R}^n$

Теорема.

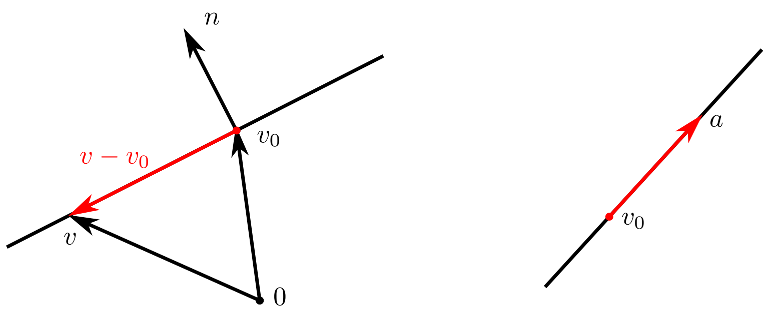
a) Через любые $k+1$ точек в $\mathbb{R}^n$ проходит плоскость размерности $\leqslant k$.

b) Если это точки не лежат в плоскости размерности $< k$, то через них проходит ровно одна плоскость размерности k.

Следствие.

1. Через любые две различные точки проходит ровно одна прямая.
2. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит ровно одна плоскость.

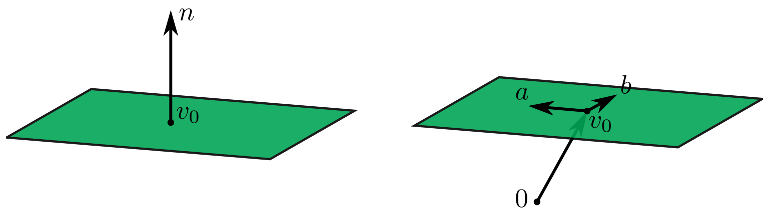
89. Три способа задания прямой в $\mathbb{R}^2$. Уравнение прямой в $\mathbb{R}^2$, проходящей через две различные точки



1. $Ax + By = C \qquad (A, B) \neq (0, 0)$ — нормаль.
2. векторное уравнение $(v - v_0, n) = 0$, где n — нормаль.
3. параметрическое уравнение $v = v_0 + at$, где a — направляющий вектор.
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, & a = (a_1, a_2) \\ y = y_0 + a_2 t. & v_0 = (x_0, y_0) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \qquad \begin{matrix} x_1 = x_0 \implies x = x_0, \\ y_1 = y_0 \implies y = y_0. \end{matrix}$$

90. Три способа задания плоскости в $\mathbb{R}^3$

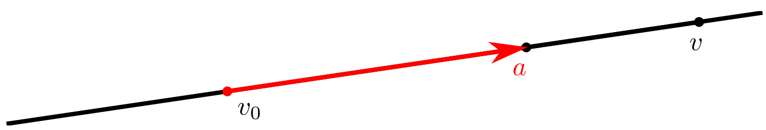


1. $Ax + By + Cz = D \qquad (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ — нормаль.
2. векторное уравнение $(v - v_0, n) = 0$.
3. параметрическое уравнение $v = v_0 + at + bs$, где a, b — направляющие векторы (базис в направляющем подпространстве).

91. Уравнение плоскости в $\mathbb{R}^3$, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

92. Три способа задания прямой в $\mathbb{R}^3$



1. $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z = D_2 \end{cases} \qquad \operatorname{rk} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$

2. векторное уравнение $[v - v_0, a] = 0$, где $v - v_0$ — точка, a — направляющий вектор.
3. параметрическое уравнение $v = v_0 + at$.

$$\begin{matrix} v_0 = (x_0, y_0, z_0) \\ a = (a_1, a_2, a_3) \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \\ z = z_0 + a_3 t. \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}}$$ — каноническое уравнение прямой

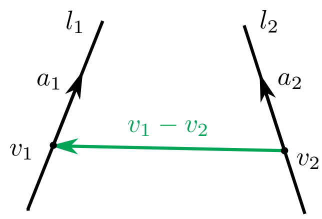
Если, например $a_1 = 0$, то пишут $\begin{cases} \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3} \\ x = x_0 \end{cases}$

93. Уравнения прямой в $\mathbb{R}^3$, проходящей через две различные точки

Уравнение прямой, проходящей через точки (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1):

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

94. Случаи взаимного расположения двух прямых в $\mathbb{R}^3$

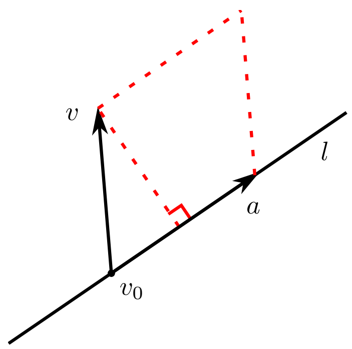


1. Совпадают.
2. Параллельны.
3. Пересекаются в точке.
4. Скрещиваются.

1) или 2) $\Longleftrightarrow$ $[a_1, a_2] = \overrightarrow{0}$.

1), 2) или 3) $\Longleftrightarrow$ $(a_1, a_2, v_1 - v_2) = 0$.

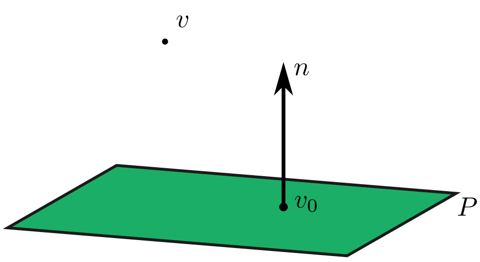
95. Формула для расстояния от точки до прямой в $\mathbb{R}^3$



Расстояние от точки v до прямой $l = v_0 + at$:

$$\rho(v, l) = \frac{|[v - v_0, a]|}{|a|}$$

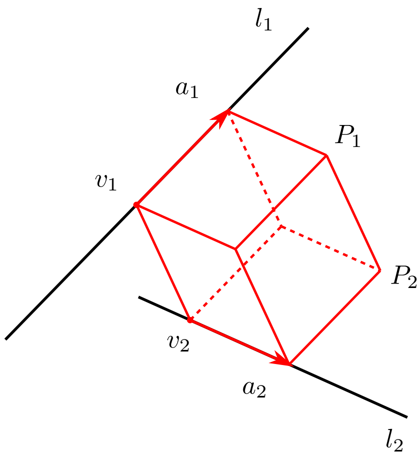
96. Формула для расстояния от точки до плоскости в $\mathbb{R}^3$



Расстояние от точки v до плоскости P с направляющей нормалью n и направляющим подпространством S ($S = n^{\perp}$):

$$\rho(v, P) = \frac{|(v - v_0, n)|}{|n|}.$$

97. Формула для расстояния между двумя скрещивающимися прямыми в $\mathbb{R}^3$



Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми $l_1 = v_1 + a_1 t$ и $l_2 = v_2 + a_2 t$:

$$P_1 = v_1 + \langle a_1, a_2 \rangle$$
$$P_2 = v_2 + \langle a_1, a_2 \rangle$$
$$\rho(l_1, l_2) = \rho(p_1, p_2)$$

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|(a_1, a_2, v_1 - v_2)|}{|[a_1, a_2]|}$$

98. Линейный оператор

Пусть V — векторное пространство над F, $\dim V = n$.

Определение. *Линейным оператором* (или *линейным преобразованием*) на/в V называется всякое линейное отображение $\varphi \colon V \to V$ (то есть из V в себя).

$\mathrm{L}(V) := \mathrm{Hom}(V, V)$ — все линейные операторы на/в V.

99. Матрица линейного оператора

Пусть $\varphi \in \mathrm{L}(V)$, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V.

Тогда, $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot A, \quad A \in M_n(F)$.

A называется матрицей линейного оператора в базисе $\mathbb{e}$.

Обозначение: $A(\varphi, \mathbb{e})$.

В столбце $A^{(j)}$ записаны координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{e}$.

100. Связь между координатами вектора и его образа при действии линейного оператора

Пусть $\varphi \in \mathrm{L}(V)$, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $A = A(\varphi, \mathbb{e})$,

$$\begin{cases} v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \\ \varphi(v) = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n \end{cases} \implies \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

101. Формула изменения матрицы линейного оператора при переходе к другому базису

Пусть $\mathbb{e}'$ — другой базис V, $\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C$, $C \in M_n^0(F)$

$A = A(\varphi, \mathbb{e})$, $A' = A(\varphi, \mathbb{e}') \implies A' = C^{-1} A C$.

102. Подобные матрицы

Определение. Матрицы $A, A' \in M_n$ называются *подобными*, если $\exists C \in M_n^0(F)$, такая что $A' = C^{-1} A C$.

103. Подпространство, инвариантное относительно линейного оператора

Определение. Подпространство $U \subseteq V$ называется *инвариантным относительно* φ (или φ-*инвариантным*), если $\varphi(U) \subseteq U$ (то есть $\varphi(u) \in U \ \forall u \in U$).

104. Вид матрицы линейного оператора в базисе, дополняющем базис инвариантного подпространства

Пусть $U \subseteq V$ — φ-инвариантное подпространство, $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис U, дополним его до базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ всего V.

Тогда $A(\varphi, \mathbb{e})$ имеет вид

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ n-k \end{array} & \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \end{array}. \tag{1}$$

При этом $A\left(\varphi\big|_U, (e_1, \ldots, e_k)\right) = A$.

Если $U = \ker\varphi \implies A = 0$,

$\quad U = \operatorname{Im}\varphi \implies C = 0$.

Обратно, если для некоторого базиса $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_k)$ $\;A(\varphi, \mathbb{e})$ имеет вид (1), то векторы $e_1, \ldots, e_k$ порождают φ-инвариантное подпространство.

105. Вид матрицы линейного оператора в базисе, согласованном с разложением пространства в прямую сумму двух инвариантных подпространств

Пусть $U_1, U_2 \subseteq V$ — два φ-инвариантных подпространства, такие что $V = U_1 \oplus U_2$.

Пусть $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис U_1, $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ — базис U_2. Тогда, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V и $A(\varphi, \mathbb{e})$ имеет вид

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ n-k \end{array} & \begin{pmatrix} \star & 0 \\ 0 & \diamond \end{pmatrix} \end{array}.$$

106. Собственный вектор линейного оператора

Вектор $v \in V$ называется *собственным* для φ, если $v \neq 0$ и $\varphi(v) = \lambda v$ для некоторого $\lambda \in F$.

107. Собственное значение линейного оператора

Элемент $\lambda \in F$ называется *собственным значением* для φ, если $\exists v \in V$, такой что $v \neq 0$ и $\varphi(v) = \lambda v$.

108. Спектр линейного оператора

Множество всех собственных значений линейного оператора называется его *спектром* и обозначается $\operatorname{Spec}\varphi$.

109. Диагонализуемый линейный оператор

Определение. Линейный оператор φ называется *диагонализуемым*, если существует базис в V, в котором матрица линейного оператора φ диагональна.

110. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах собственных векторов

Предложение. Линейный оператор φ диагонализуем $\iff$ в V есть базис из собственных векторов.

111. Собственное подпространство линейного оператора

Пусть $\varphi \in \mathrm{L}(V)$, $\lambda \in F$.

$V_\lambda(\varphi) := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$.

Определение. $\lambda \in \operatorname{Spec}\varphi \implies V_\lambda(\varphi)$ называется *собственным подпространством* линейного оператора φ, отвечающим собственному значению λ.

112. Характеристический многочлен линейного оператора

Определение. Многочлен $\chi_\varphi(t) := (-1)^n \det(\varphi - t \cdot \mathrm{Id}) \in F[t]$ называется *характеристическим многочленом* линейного оператора φ.

113. Связь спектра линейного оператора с его характеристическим многочленом

Следствие. $\lambda \in \operatorname{Spec}\varphi \iff \chi_\varphi(\lambda) = 0$, то есть λ — корень характеристического многочлена.

Следствие. $|\operatorname{Spec}\varphi| \leqslant n$.

114. Алгебраическая кратность собственного значения линейного оператора

Пусть $\lambda \in \operatorname{Spec}\varphi$.

Пусть $a_\lambda = a_\lambda(\varphi) :=$ кратность λ как корня многочлена $\chi_\varphi(t)$. То есть $\chi_\varphi(t) \,\vdots\, (t-\lambda)^{a_\lambda}$ и $\chi_\varphi(t) \not\vdots\, (t-\lambda)^{a_\lambda+1}$.

Определение. a_λ называется *алгебраической кратностью* собственного значения λ.

115. Геометрическая кратность собственного значения линейного оператора

Определение. Число $g_\lambda = g_\lambda(\varphi) := \dim V_\lambda(\varphi)$ называется *геометрической кратностью* собственного значения λ.

116. Связь между алгебраической и геометрической кратностями собственного значения линейного оператора

Предложение. $g_\lambda \leqslant a_\lambda \ \forall \lambda \in \operatorname{Spec}\varphi$.

117. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах его характеристического многочлена и кратностей его собственных значений

Теорема. *(критерий диагонализуемости) φ диагонализуемо $\iff$ выполнены одновременно следующие условия:*

1. *$\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители. ($\star$)*
2. *если $\chi_\varphi(t) = (t-\lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_s)^{k_s}$, то $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$ $\forall i$. (то есть $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$)*

118. Линейное отображение евклидовых пространств, сопряжённое к данному

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство со скалярным произведением $(\bullet, \bullet)$, $\quad \dim \mathbb{E} = n$,
$\mathbb{E}'$ — другое евклидово пространство со скалярным произведением $(\bullet, \bullet)'$, $\quad \dim \mathbb{E}' = m$,
$\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$.

Определение. Линейное отображение $\psi\colon \mathbb{E}' \to \mathbb{E}$ называется *сопряженным* к φ, если

$$(\varphi(x), y)' = (x, \psi(y)) \quad \forall x \in \mathbb{E}, y \in \mathbb{E}'.$$

Обозначение: φ^*.

119. Линейный оператор в евклидовом пространстве, сопряжённый к данному

Пусть $\mathbb{E}' = \mathbb{E}$.

$\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ — линейный оператор $\implies$ $\exists!$ линейный оператор $\varphi^*\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, такой что $(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{E}$.

120. Самосопряжённый линейный оператор в евклидовом пространстве

Определение. Линейный оператор $\varphi \in L(\mathbb{E})$ называется *самосопряженным* (или *симметричным*), если $\varphi = \varphi^*$, то есть $(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{E}$‘.

121. Теорема о каноническом виде самосопряжённого линейного оператора

Теорема. $\varphi = \varphi^* \implies$ *в $\mathbb{E}$ существует ортонормированный базис из собственных векторов.*

В частности, φ диагонализуем над $\mathbb{R}$ и $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители над $\mathbb{R}$.

122. Каким свойством обладают собственные подпространства самосопряжённого линейного оператора, отвечающие попарно различным собственным значениям

Предложение. $\varphi = \varphi^*$, $\lambda, \mu \in \operatorname{Spec}\varphi$, $\lambda \neq \mu \implies \mathbb{E}_\lambda(\varphi) \perp \mathbb{E}_\mu(\varphi)$.

123. Приведение квадратичной формы к главным осям

Теорема. *Для любой квадратичной формы $Q\colon \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ существует ортонормированный базис $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, в котором Q принимает канонический вид $Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$. Более того, набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ определен однозначно, с точностью до перестановки.*

124. Ортогональный линейный оператор

Определение. Линейный оператор $\varphi \in L(\mathbb{E})$ называется *ортогональным*, если $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{E}$ (то есть φ сохраняет скалярное произведение).

125. Теорема о пяти эквивалентных условиях, определяющих ортогональный линейный оператор

Теорема. $\varphi \in L(\mathbb{E}) \implies$ *следующие условия эквивалентны:*

(1) φ ортогонален.

(2) $|\varphi(x)| = |x| \quad \forall x \in \mathbb{E}$ (то есть φ сохраняет длины векторов).

(3) $\exists \varphi^{-1}$ и $\varphi^{-1} = \varphi^*$ (то есть $\varphi^*\varphi = \varphi\varphi^* = \mathrm{Id}$).

(4) $\forall$ ортонормированного базиса $\mathbb{e}$ матрица $A(\varphi, \mathbb{e})$ ортогональна.

(5) $\forall$ ортонормированного базиса $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ векторы $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ образуют ортонормированный базис.

126. Теорема о каноническом виде ортогонального линейного оператора

Теорема. *Если $\varphi \in L(\mathbb{E})$ — ортогональный оператор, то существует ортонормированный базис $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, такой что*

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha_1) & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Pi(\alpha_2) & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \Pi(\alpha_k) & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Pi(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

127. Классификация ортогональных линейных операторов в трёхмерном евклидовом пространстве

Следствие. $\dim \mathbb{E} = 3 \implies \exists$ ортонормированный базис $\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$, такой что $A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ для некоторого α.

128. Теорема о сингулярных базисах для линейного отображения евклидовых пространств. Сингулярные значения линейного отображения.

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство со скалярным произведением $(\bullet, \bullet)$, $\quad \dim \mathbb{E} = n$,

$\mathbb{E}'$ — другое евклидово пространство со скалярным произведением $(\bullet, \bullet)'$, $\quad \dim \mathbb{E}' = m$,

$\varphi \colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}', rk\varphi = r (= \dim \operatorname{Im} \varphi)$.

Теорема (О сингулярных базисах). $\exists$ *ортонормированные базисы $\mathbb{e}$ в $\mathbb{E}$ и $\mathbb{f}$ в $\mathbb{E}'$, такие что*

$$A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \sigma_r > 0.$$

Более того, числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ определены однозначно.

Определение. В условиях теоремы, базисы $\mathbb{e}$, $\mathbb{f}$ называются *сингулярными базисами* линейного отображения φ, e_i, f_j — *сингулярными векторами*, $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ — *сингулярными значениями.*

129. Теорема о сингулярном разложении матрицы. Сингулярные значения матрицы.

Следствие (SVD). $\forall A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R}), rkA = r \implies \exists$ ортогональные матрицы $U \in M_m(\mathbb{R}), V \in M_n(\mathbb{R})$, такие что $A = U \Sigma V^T$, где

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \sigma_r > 0$$

Более того, $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ определены однозначно.

Определение. Числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ называются *сингулярными значениями* матрицы A.

130. Усечённое сингулярное разложение матрицы.

$A = U\Sigma V^t \rightsquigarrow$ положим $u_i = U^{(i)}, v_j = V^{(j)}$.

Предложение.

a) Если $m \leqslant n$, то $\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times m}{\hat{U}} \underset{m\times m}{\hat{\Sigma}} \underset{m\times n}{\hat{V}^T}$, где $\hat{U} = U$, $\hat{\Sigma} = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0) \in M_m$, $\hat{V} = (v_1 \ldots v_m)$

b) Если $m \geqslant n$, то $\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times n}{\hat{U}} \underset{n\times n}{\hat{\Sigma}} \underset{n\times n}{\hat{V}^T}$, где $\hat{U} = (u_1 \ldots u_n)$, $\hat{\Sigma} = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0) \in M_n$, $\hat{V} = V$

Определение. Разложение $A = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^T$ называется усечённым сингулярным разложением матрицы A.

131. Теорема о низкоранговом приближении.

Напомним, что $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ — евклидово пространство относительно скалярного произведения $(A, B) = tr\left(A^T B\right)$.

В этом пространстве “длина” матрицы A называется её *нормой Фробениуса.* Обозначение: $||A||$ $(||A||_F)$.

$$||A|| = \sqrt{tr(A^T A)} = \sqrt{tr(AA^t)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2}$$

Теорема (О низкоранговом приближении)**.** *Пусть $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$, $rkA = r$ и $k < r$. Пусть $A = U\Sigma V^t$ - сингулярное разложение для A.*

$$\textit{Положим } \Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$$

Тогда минимум величины $||A - B||$ среди всех матриц $B \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ ранга $\leqslant k$ достигается при $B = U\Sigma_k V^T$

132. Реперы и аффинные системы координат в $\mathbb{R}^n$.

Напомним, что аффинная система координат в $\mathbb{R}^n$ определяется репером $(p; e_1, \ldots, e_n)$, где $p \in \mathbb{R}^n$, а $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис в $\mathbb{R}^n$.

Точка $x \in \mathbb{R}^n$ имеет в этой аффинной системе координат координаты $x_1, \ldots, x_n \Leftrightarrow x = p + x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$.

133. Формула изменения аффинных координат точки в $\mathbb{R}^n$ при переходе к другому реперу.

Пусть теперь $(p'; e'_1, \ldots, e'_n)$ — другой репер.

Тогда $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C$ - матрица перехода.

p' имеет координаты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ в репере $(p; e_1, \ldots, e_n)$.

Предложение. Пусть $x = p' + x'_1 e'_1 + \ldots x'_n e'_n$. Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ — формула изменения координат при переходе к другому реперу.}$$

134. Прямоугольные декартовы системы координат в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Аффинная система координат называется *прямоугольной декартовой системой координат* (ПДСК), если в соответствующем репере $(p; e_1, \ldots, e_n)$ базис $(e_1, \ldots, e_n)$ является ортонормированным.

Замечание. Если $(p; e_1, \ldots, e_n)$ — ПДСК и $(p'; e'_1, \ldots, e'_n)$ - другая аффинная система координат, $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)\, C$, то

$$(p'; e'_1, \ldots, e'_n) \text{ — ПДСК} \iff \text{матрица } C \text{ ортогональна } \left(\text{то есть } C^T C = E\right)$$

135. Гиперповерхности 2-го порядка в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Подмножество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *квадрикой* (или *гиперповерхностью 2-го порядка*), если оно является множеством корней некоторого многочлена 2-й степени от координат в некоторой аффинной системе координат.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2a_{ij}x_ix_j}_{\text{квадратичная форма } Q(x)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_i x_i}_{\text{линейная форма } l(x)} + c = 0$$

Замечание. $n = 2 \rightsquigarrow$ "коники" ("кривые 2-го порядка");
$n = 3 \rightsquigarrow$ "поверхности 2-го порядка".

136. Теорема о каноническом виде уравнения гиперповерхности 2-го порядка в $\mathbb{R}^n$.

Теорема. *Для любой квадрики в $\mathbb{R}^n$ $\exists$ ПДСК, в которой уравнение $\star$ имеет один из следующих видов:*

I (невырожденный случай) $A_1x_1^2 + \ldots + A_nx_n^2 + C = 0,\ A_i \neq 0$

II (вырожденный случай)

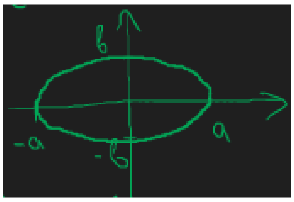
a) $A_1x_1^2 + \ldots + A_kx_k^2 + C = 0,\ k < n,\ A_i \neq 0$

b) $A_1x_1^2 + \ldots + A_kx_k^2 + Bx_{k+1} = 0,\ k < n,\ A_i \neq 0,\ B \neq 0$

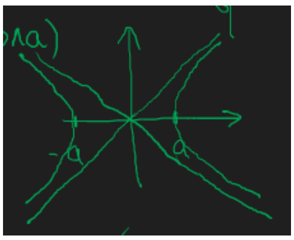
137. Метрическая классификация кривых 2-ого порядка в $\mathbb{R}^2$.

Канонические виды кривых 2-ого порядка в $\mathbb{R}^2$:

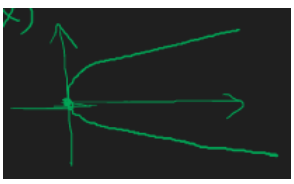
1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, a \geqslant b > 0$ — эллипс



2. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — гипербола



3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1, a \geqslant b > 0$ — мнимый эллипс
4. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = (\dfrac{x}{a} - \dfrac{iy}{b})(\dfrac{x}{a} + \dfrac{iy}{b}) = 0, a \geqslant b > 0$ — пара мнимых пересекающихся прямых
5. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — пара пересекающихся прямых
6. $y^2 = 2px, p > 0$ — парабола



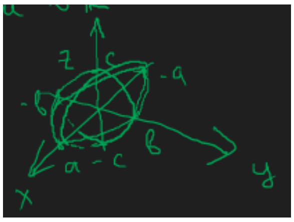
7. $x^2 = a^2, a > 0$ — пара параллельных прямых
8. $x^2 = -a^2, a > 0$ — пара мнимых параллельных прямых

9. $x^2 = 0$ — пара совпадающих прямых

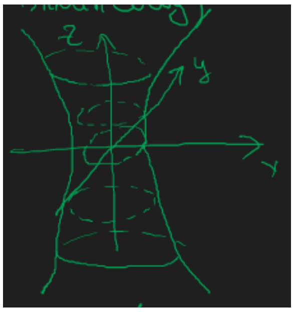
138. Метрическая классификация поверхностей 2-ого порядка в $\mathbb{R}^3$.

Канонические виды поверхностей 2-ого порядка в $\mathbb{R}^3$:

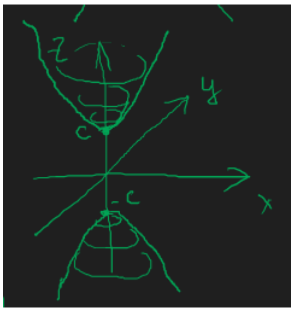
1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, a \geqslant b \geqslant c > 0$ — эллипсоид



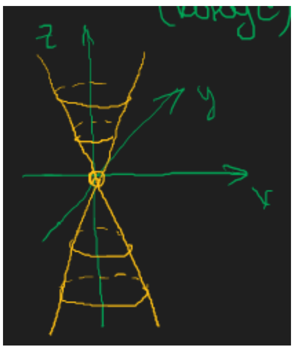
2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1, a \geqslant b \geqslant c > 0$ — мнимый эллипсоид
3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ — вырожденный эллипсоид
4. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, a \geqslant b$ — однополостный гиперболоид



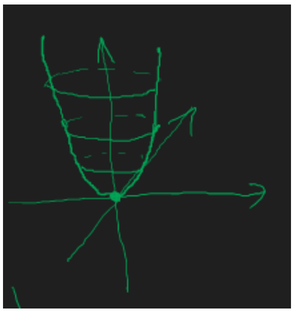
5. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1, a \geqslant b$ — двуполостный гиперболоид



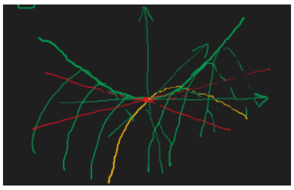
6. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0, a \geqslant b$ — конус



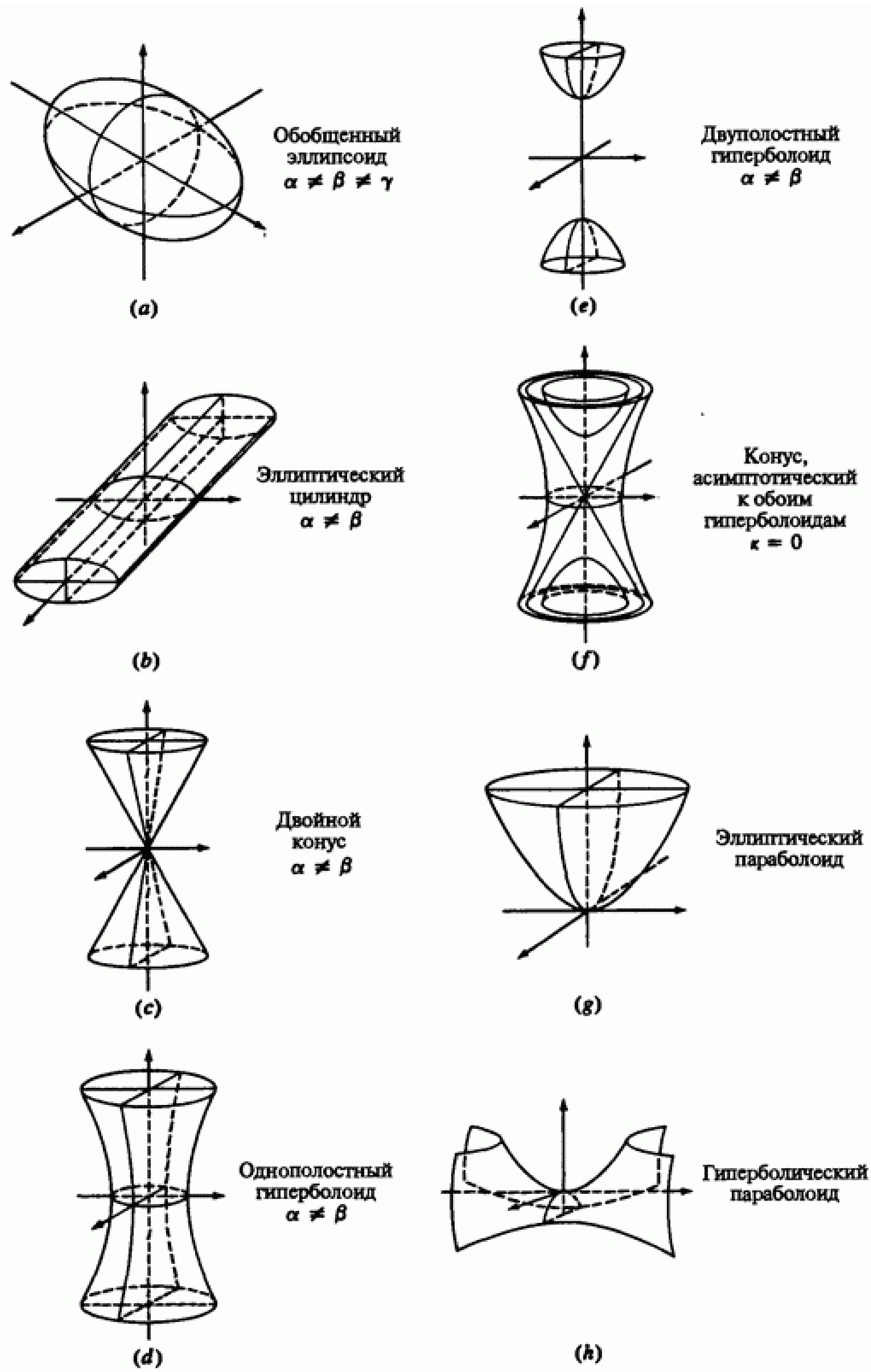
7. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, a \geqslant b$ — эллиптический параболоид



8. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, a \geqslant b$ — гиперболический параболоид (седло)



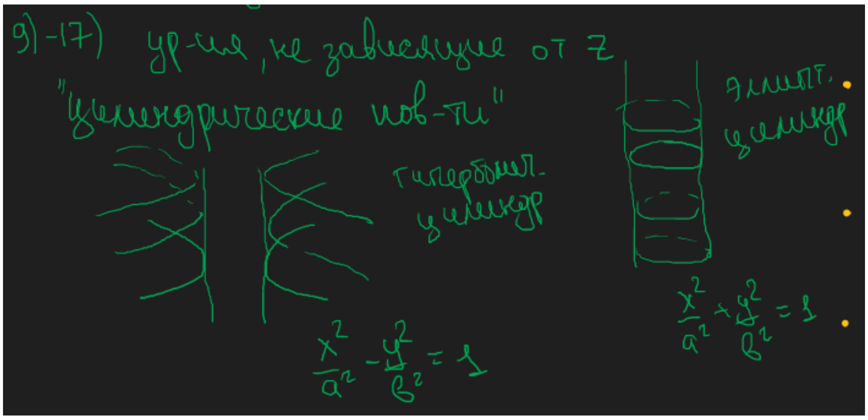
Небольшая иллюстрация:



Уравнения, не зависящие от z. "Цилиндрические поверхности":

9. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, a \geqslant b > 0$ — эллиптический цилиндр
10. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ — мнимый эллиптический цилиндр
11. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — гиперболический цилиндр
12. $y^2 = 2px, p > 0$ — параболический цилиндр
13. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — пара пересекающихся плоскостей

14. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — пара мнимых пересекающихся плоскостей
15. $y^2 = a^2, a \neq 0$ — пара параллельных плоскостей
16. $y^2 = -a^2, a \neq 0$ — пара мнимых параллельных плоскостей
17. $y^2 = 0$ — пара совпадающих плоскостей



139. Жорданова клетка.

Определение. Жордановой клеткой порядка m_i с собственным значением μ_i называется матрица:

$$J_{\mu_i}^{m_i} = \begin{pmatrix} \mu_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_i \end{pmatrix}$$

140. Теорема о жордановой нормальной форме линейного оператора.

Теорема. *Пусть выполнен пункт 1 критерия диагонализуемости линейного оператора, т.е. $\chi_\varphi(t)$ раскладывается на линейные множители. Тогда $\exists$ базис $\mathbb{e}$ в V, такой что:*

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} J_{\mu_1}^{m_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_{\mu_2}^{m_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\mu_{p-1}}^{m_{p-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_{\mu_p}^{m_p} \end{pmatrix}, \qquad \{\mu_1, \dots, \mu_p\} = \operatorname{Spec}\varphi = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$$

Более того, матрица $A(\varphi, \mathbb{e})$ определена однозначно с точностью до перестановки клеток.

141. Корневой вектор линейного оператора. Высота корневого вектора.

$\lambda \in \operatorname{Spec}\varphi \rightsquigarrow V_\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\} = \ker(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id})$

Определение. Вектор $v \in V$ называется корневым для φ с собственным значением λ, если $\exists m \geqslant 0$, такое что $(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id})^m v = 0$. При этом наименьшее такое m называется высотой корневого вектора v (обозначается: $\operatorname{ht} v$).

$\operatorname{ht} v = 0 \iff v = 0$

$\operatorname{ht} v = 1 \iff (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id})v = 0 \iff \varphi(v) = \lambda v \iff v$ – собственный вектор с собственным значением λ

142. Корневое подпространство линейного оператора.

Определение. *Корневым подпространством* линейного оператора φ, отвечающим собственному значению λ, называется:

$$V^\lambda(\varphi) := \{v \in V \mid (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id})^m v = 0 \text{ для некоторого } m \geqslant 0\}$$

— множество всех корневых векторов, отвечающих собственному значению λ.

Замечание. $V_\lambda(\varphi) \subseteq V^\lambda(\varphi)$

Факты.

1. $V^\lambda(\varphi)$ — подпространство в V
2. $V^\lambda(\varphi)$ — φ-инвариантно
3. $\dim V^\lambda(\varphi) = a_\lambda$
4. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \operatorname{Spec}\varphi, \lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, то $V^{\lambda_1}(\varphi), \ldots, V^{\lambda_k}(\varphi)$ линейно независимы

143. Теорема о разложении векторного пространства в прямую сумму корневых подпространств линейного оператора.

Теорема. *Если* $\chi_\varphi(t) = (t-\lambda_1)^{k_1} \ldots (t-\lambda_s)^{k_s}$*, то* $V = V^{\lambda_1}(\varphi) \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_s}(\varphi)$

144. Формула для числа жордановых клеток с заданным размером и собственным значением.

Пусть λ — некоторое собственное значение линейного оператора φ, c_k — число жордановых клеток размера k с собственным значением λ, $d_i = \dim\ker(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id})^i$.

Тогда выполняется формула: $c_k = d_{k+1} + d_{k-1} - 2d_k$.