Математический анализ—2

Коллоквиум

Лектор: Зароднюк Алёна Владимировна

оригинальный LaTeX by Винер Даниил @danya_vin

Авторы текущего документа:

Жуков Андрей | github   coffecat46 | github

Версия от 4 ноября 2025 г.

Содержание

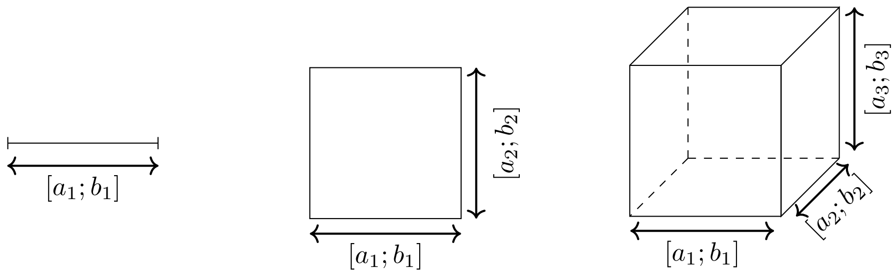
1 Основные определения

1.1 Определение (замкнутого) бруса (координатного промежутка, параллелепипеда)

Определение. Замкнутый брус (координатный промежуток) в $\mathbb{R}^n$ — множество, описываемое как

$$\begin{aligned} I &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i \in \{1,n\}\} \\ &= [a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n] \end{aligned}$$

Примечание. $I = \{a_1,b_1\} \times \ldots \times \{a_n,b_n\}$, где $\{a_i, b_i\}$ может быть отрезком, интервалом и т.д.



Пример брусов размерности с 1 по 3

1.2 Определение меры (объема) бруса

Определение. Мера бруса — его объём:

$$\mu(I) = |I| = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

1.3 Определение разбиения бруса

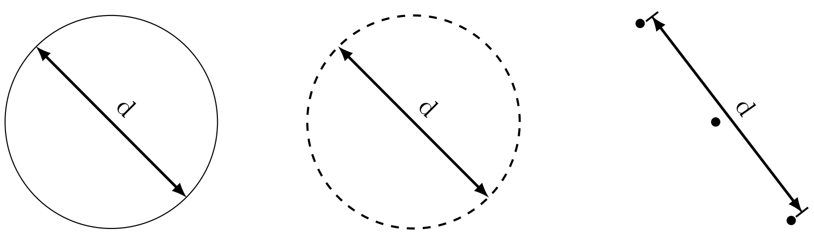
Определение. Пусть I — замкнутый, невырожденный брус и $\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i = I$, где I_i попарно не имеют общих внутренних точек. Тогда набор $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^{k}$ называется разбиением бруса I

1.4 Определение диаметра множества в $\mathbb{R}^n$

Определение. Диаметр произвольного ограниченного множества $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть

$$d(M) = \sup_{x,y \in M} \|x - y\|, \text{ где}$$

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$



Пример диаметра для разных ограниченных множеств(Для всех трёх он равен d)

1.5 Определение ограниченного множества в $\mathbb{R}^n$

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ и } \exists r > 0, \text{ такой что } M \subset B_r(x_0)$$

1.6 Определение масштаба (диаметра) разбиения

Определение. Масштаб разбиения $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^k$ — число $\lambda(\mathbb{T}) = \Delta_{\mathbb{T}} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} d(I_i)$

1.7 Определения отмеченных точек и размеченного разбиения

Определение. Пусть $\forall\, I_i$ выбрана точка $\xi_i \in I_i$. Тогда, набор $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^k$ будем называть **отмеченными точками**

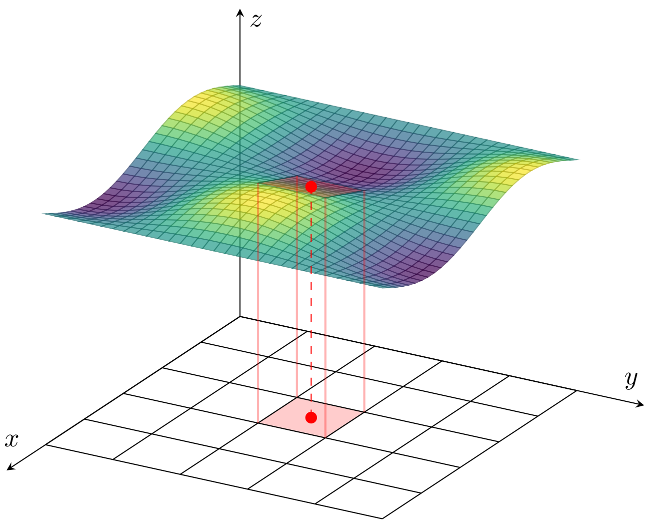
Определение. Размеченное разбиение — пара $(\mathbb{T}, \xi)$

1.8 Определение интегральной суммы Римана

Пусть I — невырожденный, замкнутый брус, функция $f : I \to \mathbb{R}$ определена на I

Определение. Интегральная сумма Римана функции f на $(\mathbb{T}, \xi)$ — величина

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) := \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \cdot |I_i|$$



Пример интегрирования в $\mathbb{R}^2$ по определению

1.9 Определение интегрируемой по Риману функции на замкнутом брусе в $\mathbb{R}^n$

Определение. Функция f интегрируема по Риману на замкнутом брусе I $(f : I \to \mathbb{R})$, если

$$\exists A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta : \text{ верно } |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < \varepsilon$$

Тогда A называется *кратным интегралом Римана* и

$$A = \int\limits_I f(x) \mathrm{d}x = \int \dots \int\limits_I f(x_1, \dots, x_n) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$$

Обозначение: $f \in \mathcal{R}(I)$

1.10 Определение множества меры нуль по Лебегу

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть **множеством меры 0 по Лебегу**, если $\forall \varepsilon > 0$ существует не более чем счетный набор (замкнутых) брусов $\{I_i\}$ и выполняются:

- $M \subset \bigcup\limits_i I_i$
- $\sum\limits_i |I_i| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

1.11 Определение внутренней точки множества

Определение. Пусть имеется $M \subset \mathbb{R}^n$. Точку $x_0 \in M$ будем называть *внутренней* точкой M, если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset M$$

1.12 Определение внешней точки множества

Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *внешней* точкой M, если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset (\mathbb{R}^n \setminus M)$$

1.13 Определение граничной точки множества

Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *граничной* точкой M, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \ (B_\varepsilon(x_0) \cap M) \neq \varnothing \wedge B_\varepsilon(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \varnothing$$

1.14 Определение изолированной точки множества

Определение. Точку $x_0 \in M$ будем называть *изолированной* точкой M, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon (x_0) \cap M = \varnothing$$

1.15 Определение предельной точки множества

Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *предельной* точкой M, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon (x_0) \cap M \neq \varnothing$$

1.16 Определение точки прикосновения множества

Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *точкой прикосновения* M, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \ B_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \varnothing$$

1.17 Определение открытого множества

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если все его точки внутренние

1.18 Определение замкнутого множества

Определение. Множество $M \subset R^n$ называется замкнутым, если $\mathbb{R}^n \setminus M$ — открыто

1.19 Определение компакта

Определение. Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется *компактом*, если из $\forall$ его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие

1.20 Определение колебания функции на множестве

Определение. Колебанием функции f на множестве $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть число $\omega(f, M)$:

$$\omega(f, M) = \sup_{x,y \in M} |f(x) - f(y)| = \sup_{x \in M} f(x) - \inf_{y \in M} f(y)$$

1.21 Определение колебания функции в точке

Определение. Колебанием функции f в точке $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть число

$$\omega(f, x_0) := \lim_{r \to 0+} \omega(f, B_r^M(x_0)), \text{ где } B_r^M = B_r(x_0) \cap M$$

1.22 Определение непрерывности функции в точке и на множестве

Определение. Функция $f : M \subset \mathbb{R}^n;\ f \colon M \to \mathbb{R}$ *непрерывна в точке* x_0, если

1. **Через колебание:**

$$f \text{ — непрерывна в точке } x_0 \iff \omega(f, x_0) = 0$$

2. **Классическое определение:**

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in M \text{ такого что } |x - x_0| < \delta \text{ верно } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

На множестве:

1. Непрервына на множестве всюду — непрерывность в каждой точке.

2. Непрерывно на множестве почти всюду — непрерывность выполняется везде кроме множества меры нуль.

1.23 Определение выполненения свойства почти всюду

Определение. Если какое-то свойство не выполняется лишь на множестве меры нуль, то говорят, что это свойство выполняется почти всюду

1.24 Определение пересечения двух разбиений

Определение. Пусть $\mathbb{T}_1 = \{I_k^1\}$ и $\mathbb{T}_2 = \{I_m^2\}$ — два разбиения бруса $I \subset \mathbb{R}^n$.

Пересечением разбиений ($\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$) будем называть множество всех брусов $\{I_{ij}\} : \forall I_{ij}$ выполняется

- $\exists k : I_{ij} \in \{I_k^1\}$
- $\exists m : I_{ij} \in \{I_m^2\}$
- $\{I_{ij}\}$ — разбиение бруса I

1.25 Определение измельчения разбиения

Определение. Разбиение $\mathbb{T}_1 = \{I_k^1\}$ будем называть измельчением разбиения $\mathbb{T}_2 = \{I_m^2\}$, если $\forall k \; \exists m : I_k^1 \in I_m^2 \implies \mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$ является измельчением $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$

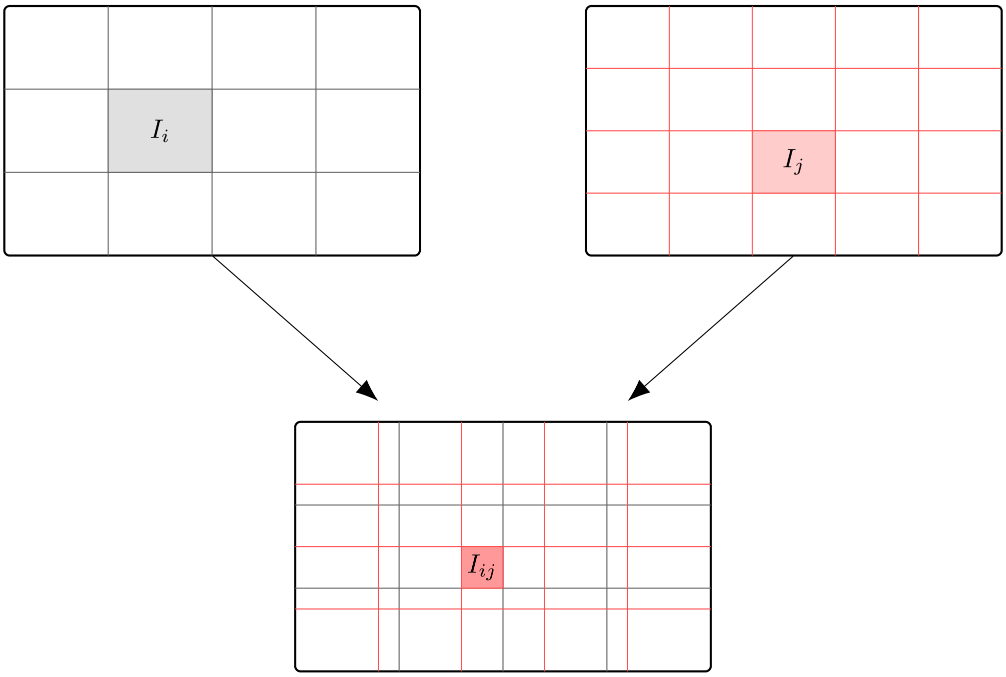


Рис. 1: Пересечение разбиений $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$

1.26 Определение верхней и нижней суммы Дарбу

Определение. Пусть I — замкнутый брус, $f : I \mapsto \mathbb{R}$, $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^K$ — разбиение бруса I, $m_i = \inf\limits_{I_i}(f)$, и $M_i = \sup\limits_{I_i}(f)$

Тогда числа $\underline{S}(f, \mathbb{T}) = \sum\limits_{i=1}^{K} m_i |I_i|$ и $\overline{S}(f, \mathbb{T}) = \sum\limits_{i=1}^{K} M_i |I_i|$ будем называть *нижней и верхней суммой Дарбу* соответственно

1.27 Определение верхнего и нижнего интеграла Дарбу

Определение. Верхним и нижним интегралом Дарбу будем называть числа соответственно

$$\overline{\mathcal{I}} := \inf_{\mathbb{T}} \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) \qquad \underline{\mathcal{I}} := \sup_{\mathbb{T}} \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$$

1.28 Определение допустимого множества

Определение. Множество $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *допустимым*, если

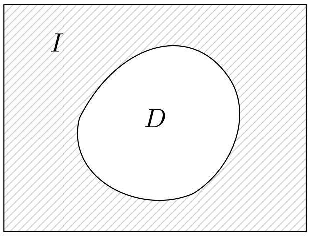
- D — ограниченно
- ∂D — множество меры нуль по Лебегу

1.29 Определение интеграла Римана по допустимому множеству

Определение. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — допустимое множество, $f : D \to \mathbb{R}$. Тогда, интегралом Римана f по D называется число $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} = \int\limits_D f(\overline{x})\mathrm{d}\overline{x} = \int\limits_{I \supset D} f \cdot \chi_D(\overline{x})\mathrm{d}\overline{x}, \text{ где } \chi_D = \begin{cases} 1, \overline{x} \in D \\ 0, \overline{x} \notin D \end{cases}$$

Если $\mathcal{I} < \infty$, то $f \in \mathcal{R}(D)$



Закрашенная область не вносит вклад в объем
так как $f(x) \cdot \chi_D = 0$

1.30 Определение сходимости функциональной последовательности в точке

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ и $f_n : X \to \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Определение. Последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится в точке* $x_0 \in X$, если сходится соответствующая числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$x_0 \in X,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \hookrightarrow |f_n(x_0) - a_{x_0}| < \varepsilon \Longrightarrow a_{x_0} = \lim_{n \to \infty} f_n x_0$$

1.31 Определение множества сходимости функциональной последовательности

Определение. Множество $D \subset X$ точек, в которых последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится называется *множеством сходимости*

1.32 Определение предельной функции функциональной последовательности

Определение. Пусть $D \subset X$ — множество сходимости $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\forall x \in D\ f_n(x) \to f(x)$. Тогда, $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ будем называть *предельной функцией* $\{f_n(x)\}$

1.33 Определение поточечной сходимости функциональной последовательности на множестве

Определение. $D \subset \mathbb{R}, f, f_n : D \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что $\{f_n(x)\}$ *сходится поточечно* к $f(x)$ на D, если

$$\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначение: $f_n(x) \xrightarrow{D} f(x)$

1.34 Определение равномерной сходимости функциональной последовательности на множестве

Определение. Пусть $D \subset \mathbb{R};\ f_n, f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Будем говорить, что $\{f_n(x)\}$ *сходится равномерно* к $f(x)$ на D, Если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N, \forall x \in D \text{ такое, что } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначение: $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$

1.35 Определение поточечной сходимости функционального ряда на множестве

Пусть $D \subset \mathbb{R},\ f_n, S : D \to \mathbb{R}\ (\forall n \in \mathbb{N})$, а также $S_k(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} f_n(x)$ — частичные суммы функционального ряда

Определение. Если $\exists S(x) : S_k \xrightarrow{D} S$, то будем говорить, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится поточечно* к $S(x)$ на D

1.36 Определение равномерной сходимости функционального ряда на множестве

Пусть $D \subset \mathbb{R},\ f_n, S : D \to \mathbb{R}\ (\forall n \in \mathbb{N})$, а также $S_k(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} f_n(x)$ — частичные суммы функционального ряда

Определение. Если $\exists S(x) : S_k \overset{D}{\rightrightarrows} S$, то будем говорить, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно* к $S(x)$

1.37 Определение абсолютной сходимости сходимости функционального ряда на множестве

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится абсолютно*, если

$$\forall x_0 \in \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) \text{ — сходится абсолютно}$$

2 Основные формулировки

2.1 Свойства меры бруса в $\mathbb{R}^n$

1. **Однородность:** $\mu(I_{\lambda a, \lambda b}) = \lambda^n \cdot \mu(I_{a,b})$, где $\lambda \geqslant 0$
2. **Аддитивность:** Пусть $I, I_1, \dots, I_k$ — брусы

   Тогда, если $\forall i, j\ I_i, I_j$ не имеют общих внтренних точек, и $\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i = I$, то

$$|I| = \sum_{i=1}^{k} |I_i|$$

3. **Монотонность**: Пусть I — брус, покрытый конечной системой брусов, то есть $I \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$, тогда

$$|I| < \sum_{i=1}^{k} |I_i|$$

2.2 Необходимое условие интегрируемости функции по Риману

Теорема. Пусть I — замкнутый брус

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

2.3 Свойства интеграла Римана

1. **Линейность.**

$$f, g \in \mathcal{R}(I) \implies (\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}(I)\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

   И верно, что:

$$\int_I (\alpha f + \beta g) \mathrm{d}x = \alpha \int_I f \mathrm{d}x + \beta \int_I g \mathrm{d}x$$

2. **Монотонность**

$$f, g \in \mathcal{R}(I);\ f|_I \leqslant g|_I \implies \int_I f \mathrm{d}x \leqslant \int_I g \mathrm{d}x$$

3. **Оценка интеграла (сверху)**

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \left| \int_I f \mathrm{d}x \right| \leqslant \sup_I |f| |I|$$

2.4 Свойства множества меры нуль по Лебегу

1. В определении множества меры нуль можно использовать *открытые* брусы
2. M — множество меры нуль, $L \subset M \Longrightarrow L$ — множество меры нуль
3. Не более чем счетное объединение множеств меры нуль является множеством меры нуль

2.5 Критерий замкнутости множества в $\mathbb{R}^n$

Теорема. M — замкнуто $\Longleftrightarrow M$ содержит **все** свои предельные точки

2.6 Теорема о компактности замкнутого бруса в $\mathbb{R}^n$

Теорема. Пусть $I \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус $\Longrightarrow I$ — компакт

2.7 Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$

Теорема. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$. K — компакт $\Longleftrightarrow K$ замкнуто и ограниченно

2.8 Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте

Теорема. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт и функция $f : K \mapsto \mathbb{R}$ - непрерывная. Тогда f на K достигает наибольшего и наименьшего значений

2.9 Теорема о связи непрерывности функции в точке с колебанием

Теорема. Пусть $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$; $f : M \mapsto \mathbb{R}$. f — непрерывна в точке $x_0 \iff \omega(f, x_0) = 0$

2.10 Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману

Теорема. Если $I \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый невырожденный брус, $f : I \to \mathbb{R}$, то $f \in R(I) \iff f$ ограничена и непрерывна почти всюду на I

2.11 Свойства интегральных сумм Дарбу

1. $$\underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$$

2. Пусть $\tilde{\mathbb{T}}$ — измельчение разбиения $\mathbb{T}$, тогда

$$\underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) \leq \underline{\mathrm{S}}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$$

3. $\forall \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 : \ \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_1) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_2)$

2.12 Теорема об интегралах Дарбу как пределах интегральных сумм Дарбу

Теорема. Пусть $I \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус, а $f : I \mapsto \mathbb{R}$ — ограничена. Тогда:

$$\overline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \to 0} \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) \qquad \text{и} \qquad \underline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \to 0} \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$$

2.13 Критерий Дарбу интегрируемости функции на замкнутом брусе

Теорема. $I \in \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус, $f : I \mapsto \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}(I) \Longleftrightarrow f$ — ограничена на I и $\underline{\mathcal{I}} = \overline{\mathcal{I}}$

2.14 Утверждение о независимости определения допустимого множества от выбора бруса

Пусть $I_1 \supset D, I_2 \supset D$, тогда

$$\int\limits_{I_1} f \cdot \chi_D \mathrm{d}x \text{ и } \int\limits_{I_2} f \cdot \chi_D \mathrm{d}x$$

либо существуют и равны, либо оба не существуют вообще

2.15 Теорема Фубини о переходе к повторному интегралу

Пусть имеются $I_x \subset \mathbb{R}^n, I_y \subset \mathbb{R}^m, I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ — замкнутые брусы, $f : I_x \times I_y \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}(I_x \times I_y)$ и $\forall$ фиксированного $x \in I_x \implies f(x,y) \in \mathcal{R}(I_y) \implies$

$$\int\limits_{I_x \times I_y} f(\overline{x}, \overline{y}) \mathrm{d}\overline{x} \mathrm{d}\overline{y} = \int\limits_{I_x} \left(\int\limits_{I_y} f(\overline{x}, \overline{y}) \mathrm{d}\overline{y} \right) \mathrm{d}\overline{x} = \int\limits_{I_x} \mathrm{d}\overline{x} \int\limits_{I_y} f(\overline{x}, \overline{y}) \mathrm{d}\overline{y}$$

Примечание. аналагочино, если взять для $\forall$ фиксированного $y \in I_y$

2.16 Супремальный критерий равномерной сходимости функциональной последовательности

Теорема. $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \iff \lim\limits_{n \to \infty} \left(\sup\limits_D |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$

2.17 Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности

Теорема. $f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall n,m > N, \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Примечание. Отрицание Критерия Коши:

$$f_n(x) \overset{D}{\not\rightrightarrows} f(x) \iff \exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall N : \ \exists n,m > N, \exists x_0 \in D \ |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \varepsilon_0$$

2.18 Теорема о почленном переходе к пределу для функциональной последовательности

Теорема. Пусть $f_n, f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка D, $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$, $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = c_n$

Тогда,

$$\exists \lim_{n \to \infty} c_n = \lim_{x \to x_0} f(x)$$
$$\left(\text{или } \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) \right)$$

2.19 Теорема о непрерывности предельной функции

Теорема. Пусть имеется $\left. \begin{array}{l} f_n, f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \\ f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f, \\ \forall n \in \mathbb{N} \ f_n \in C(D) \end{array} \right\} \implies f \in C(D)$

2.20 Утверждение о неравномерной сходимости фун. послед. при наличии разрыва

Теорема. Пусть имеется $\left.\begin{aligned} &f_n \in C\left([a;b)\right), \\ &f \in C((a;b)) + \text{разрыв в т.}a, \\ &f_n \xrightarrow{[a;b)} f \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f_n \overset{(a;b)}{\not\rightrightarrows} f$

То есть будет поточечная сходимость, но не будет равномерной:

$$f_n \xrightarrow{(a;b)} f, \text{ но не } f_n \overset{(a;b)}{\rightrightarrows} f$$

2.21 Утверждение о неравномерной сходимости фун. послед. при наличии расходимости в точке

Теорема. Пусть имеется $\left.\begin{aligned} &f_n \in C\left([a;b)\right) \\ &f_n \xrightarrow{(a;b)} f \\ &\nexists \lim_{n\to\infty} f_n(a) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f_n \overset{(a;b)}{\not\rightrightarrows} f$

2.22 Теорема о почленном интегрировании функциональной последовательности

Теорема. Пусть имеется $\left.\begin{aligned} &f_n, f : [a;b] \to \mathbb{R} \\ &f_n \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} f \\ &f_n \in \mathcal{R}([a;b]) \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f \in \mathcal{R}([a;b]) \text{ и } \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$

2.23 Теорема о почленном дифференцировании функциональной последовательности

Теорема. Пусть имеется $\left.\begin{aligned} &f_n, f, g : [a;b] \to \mathbb{R} \\ &f_n \in D([a;b]) \\ &\exists c \in [a;b] : \exists \lim_{n\to\infty} f_n(c) \\ &\exists g(x) : \; f'_n \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} g(x) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} &\exists f : \; f_n \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} f \\ &\oplus f'(x) = g(x) \end{aligned}$

2.24 Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда

Теорема. Пусть $f_n : D \to \mathbb{R} \; \forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows}$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \; \forall m > k > N \; \forall x \in D \hookrightarrow |S_m(x) - S_k(x)| = \left| \sum_{n=k+1}^{m} f_n(x) \right| < \varepsilon$$

2.25 Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда

Следствие. Пусть $\left.\begin{aligned} &f_n : D \to \mathbb{R} \; (\forall n \in \mathbb{N}) \\ &\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} 0$

2.26 Сравнительный признак равномерной сходимости функционального ряда

Теорема. Имеется
$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ и } \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x): \\ \exists N\ \forall n > N\ \forall x \in D\ |a_n(x)| \leqslant b_n(x) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows}\end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ сходится абсолютно } D$$

2.27 Мажорантный признак Вейерштрасса о равномерной сходимости функционального ряда

Следствие. Из признака сравнения.
$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x): \\ \exists N\ \forall n > N\ \sup\limits_{D} |a_n(x)| \leqslant M_n \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n \text{ — сходится}\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \overset{D}{\rightrightarrows} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится абсолютно на } D\end{array}$$

3 Вопросы на доказательство

3.1 Необходимое условие интегрирования.

Теорема. Пусть I — замкнутый брус.

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

Доказательство. От противного.

1. $f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A \in \mathbb{R}$, такая что $\forall \varepsilon > 0$, а значит для $\varepsilon = 1$ тоже:

   $$\exists \delta > 0 \colon \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} \leqslant \delta \text{ верно } |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < 1$$

   Отсюда

   $$A - 1 < \sigma < A + 1 \implies \sigma \text{ ограничена}$$

2. С другой стороны, так как предположили, что f — неограничена на I

   $$\forall\, \mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^{k} \quad \exists i_0 \colon f \text{ неограничена на } I_{i_0}$$

   Тогда рассмотрим интегральную сумму

   $$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i \neq i_0} f(\xi_i) \cdot |I_i| + f(\xi_{i_0}) \cdot |I_{i_0}|$$

   Выбором подходящего ξ_{i_0} можно сделать $f(\xi_{i_0})$ сколь угодно большой $\implies$ σ будет не ограничена - противоречние

Из противоречния пунктов 1 и 2 следует, что

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

□

3.2 Свойства интеграла Римана

1. **Линейность.**

   $$f, g \in \mathcal{R}(I) \implies (\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}(I)\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

   И верно, что:

   $$\int_I (\alpha f + \beta g) \mathrm{d}x = \alpha \int_I f \mathrm{d}x + \beta \int_I g \mathrm{d}x$$

   Доказательство.

   $$f \in \mathcal{R}(I) : \exists A_f, \text{что} \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_1 > 0\ \forall (\mathbb{T}, \xi) \colon \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_1 \quad \text{верно } \left| \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \int_I f \mathrm{d}x \right| =: |\sigma_f - A_f| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1}$$
   $$g \in \mathcal{R}(I) : \exists A_g, \text{что} \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_2 > 0\ \forall (\mathbb{T}, \xi) \colon \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_2 \quad \text{верно } \left| \sigma(g, \mathbb{T}, \xi) - \int_I g \mathrm{d}x \right| =: |\sigma_g - A_g| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1}$$

   Тогда $\forall (\mathbb{T}, \xi) \colon \Delta_{\mathbb{T}} < min(\delta_f, \delta_g) = \delta$:

   $$|\sigma(\alpha f + \beta g, \mathbb{T}, \xi) - \alpha A_f + \beta A_g| = \left| \sum (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) \cdot |I_i| - \alpha A_f - \beta A_g \right| \leqslant$$
   $$\leqslant |\alpha| \cdot |\sigma_f - A_f| + |\beta| \cdot |\sigma_g - A_g| < (|\alpha| + |\beta|) \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1} < \varepsilon$$

$\square$

2. **Монотонность**

$$f, g \in \mathcal{R}(I);\; f \leqslant g \text{ на } I \implies \int_I f\mathrm{d}x \leqslant \int_I g\mathrm{d}x$$

Доказательство.

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A_f \in \mathbb{R}\colon \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta,\ \text{выполняется } |\sigma_f - A_f| < \varepsilon$$

Аналогично для $g \in \mathcal{R}(I)$, тогда:

$$\begin{cases} A_f - \varepsilon < \sigma_1 < A_f + \varepsilon \\ A_g - \varepsilon < \sigma_2 < A_g + \varepsilon \\ \sigma_f \leqslant \sigma_g \end{cases}$$

Отсюда

$$A_f - \varepsilon < \sigma_f \leqslant \sigma_g < A_g + \varepsilon \implies A_f - \varepsilon < A_g + \varepsilon \implies A_f < A_g + 2\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$\square$

3. **Оценка интеграла (сверху)**

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \left| \int_I f\mathrm{d}x \right| \leqslant \sup_I |f||I|$$

Доказательство. По необходимому условию для интегрируемости функции (см. ниже)

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{R}(I) &\implies f \text{ Ограничена на } I \\ &\implies -\sup_I |f| \leqslant f \leqslant \sup_I |f| \end{aligned}$$

Тогда,

$$\begin{aligned} -\int_I \sup |f|\mathrm{d}x \leqslant \int_I f\mathrm{d}x \quad &\leqslant \int_I \sup |f| dx \\ -\sup_I |f||I| \leqslant \int_I f\mathrm{d}x \qquad &\leqslant \sup_I |f||I| \end{aligned}$$

$\square$

3.3 Свойства множества меры нуль по Лебегу

1. Если в определении $\{I_i\}$ заменить на открытые брусы, то определение останется верным.

Доказательство. Пусть $\{I_i\}$ — открытые брусы, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ не более чем счетный набор $\{I_i\}$: $M \subset \bigcup\limits_i I_i$ и $\sum |I_i| < \varepsilon$

Пусть $\{\bar{I}_i\}$ — открытые брусы + границы = замкнутые брусы I_i, причём объем "добавленных" плоскостей будет нулевой, так как объем бруса $n-1$ размерности, будет нулевым для объема бруса размерности n

$$M \subset \bigcup_i I_i \subset \bigcup_i \bar{I}_i,\ \text{при этом } |I_i| = |\bar{I}_i|$$

Если

$$\forall \varepsilon\ \exists \{I_i\} : M \subset \bigcup_i I_i : \sum_i |I_i| < \varepsilon$$

то

$$\forall \varepsilon\ \exists \{\bar{I}_i\} : M \subset \bigcup_i \bar{I}_i : \sum_i |\bar{I}_i| < \varepsilon$$

Докажем в обратную сторону. Мы хотим увеличить замкнутый брус в два раза и увеличенный брус взять открытым.

Пусть $\{I_i\}$ — набор замкнутых брусов

$$I_i = [a_i^1, b_i^1] \times \ldots \times [a_i^n, b_i^n], \quad V_i = \sum_i |I_i| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Так как $\left(\frac{a_i^k}{2}, \frac{b_i^k}{2}\right)$ — центр i-го бруса в k-ом измерении, увеличить изначальный брус в два раза по этому измерению можно сдвинувшись от центра не на половину, а на целую сторону, то есть на $b_i^k - a_i^k$

Таким образом:

$$\tilde{I}_i = \left(\frac{a_i^1 + b_i^1}{2} - (b_i^1 - a_i^1); \frac{a_i^1 + b_i^1}{2} + (b_i^1 - a_i^1)\right) \times \ldots \times \left(\frac{a_i^n + b_i^n}{2} - (b_i^n - a_i^n); \frac{a_i^n + b_i^n}{2} + (b_i^n - a_i^n)\right)$$

$\implies V_2 = \sum_i |\tilde{I}_i| = 2^n \cdot V_1 < \varepsilon$ □

2. Если $M \subset \mathbb{R}^n$ - множество меры нуль по Лебегу, то из $L \subset M \implies L$ - множество меры нуль по Лебегу

   Доказательство. Докажем по транзитивности

   $$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \text{ не более чем счетный набор } \{I_i\} : L \subset M \subset \bigcup_i I_i \implies L \subset \bigcup_i I_i$$

   По условию нам дано, что для $M \subset \bigcup_i I_i$ верно $\sum_i |I_i| < \varepsilon$, и тоже самое выполнено и для $L \subset \bigcup_i I_i$, тогда L по определнию является множеством меры нуль по Лебегу □

3. Не более чем счетное объединение множеств меры нуль по Лебегу, тоже является множеством меры нуль по Лебегу

   Доказательство. пусть $M = \bigcup_i^{\infty} M_k$ - объединение не более чем счетного числа множеств $\forall k \ M_k$ - множество меры нуль по Лебегу $\implies \forall k, \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ по определению множества меры нуль для них верно

   - $M_k \subset \bigcup_i^{\infty} I_i^k$ [1]
   - $\sum_i |I_i| < \varepsilon_k \qquad \forall \varepsilon_k > 0$

   Отсюда получаем $M = \bigcup_i^{\infty} M_k \subset \bigcup_i^{\infty} I_i^k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i^k| < \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ - если теперь взять $\varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{2^k}$, то мы получим

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} < \varepsilon$$

   □

3.4 Критерий замкнутости

Теорема. M — замкнуто $\Longleftrightarrow M$ содержит **все** свои предельные точки

Доказательство. Докажем необходимость и достаточность

[1] I_i^k - это i-ый для M_k, а не степень

1. *(Необходимость)* Докажем $\Longrightarrow$ от противного

   - Пусть x_0 — предельная для M и $x_0 \notin M$. Тогда, $\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \overset{\circ}{B}_\varepsilon (x_0) \cap M \neq \varnothing$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$
   - По условию M — замкнуто, то есть $\mathbb{R}^n \setminus M$ — открыто $\Longrightarrow$ все его точки внутренние и $\exists r > 0$:

   $$B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \Longrightarrow \overset{\circ}{B_r(x_0)} \subset \mathbb{R}^n \setminus M \text{ и } \overset{\circ}{B}_r (x_0) \cap M = \varnothing$$

   Пришли к противоречию $\Longrightarrow M$ содержит все свои предельные точки □

2. *(Достаточность)* Докажем $\Longleftarrow$

   Пусть y_0 — не является предельной для M, то есть $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \Longrightarrow \exists r > 0$:

   $$\begin{cases} \overset{\circ}{B}_r (y_0) \cap M = \varnothing \\ y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{cases} \Longrightarrow B_r(y_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$$

   $\Longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus M$ — открытое и состоит из всех точек, не являющихся предельными $\Longrightarrow M$ — замкнуто по определению

   □

3.5 Теорема о компактности замкнутого бруса

Теорема. Пусть $I \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус $\Longrightarrow I$ — компакт

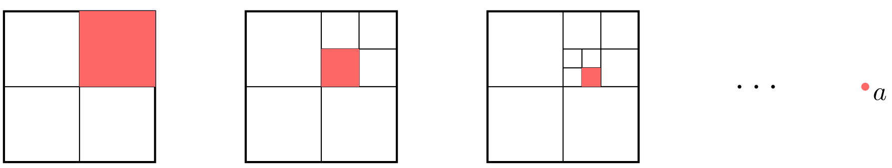
Доказательство. Пойдем от противного

Пусть $I = [a_1; b_1] \times \ldots \times [a_n; b_n]$

1. Положим, что I — не компакт. Значит, существует его покрытие $\{A_\alpha\}$ — открытые множества, такие что $I \subset \{A_\alpha\}$, не допускающее выделения конечного подкпорытия
2. Поделим каждую сторону пополам. Тогда, $\exists I_1$, такой что не допускает конечного подпокрытия. Иначе, I — компакт
3. Аналогично, повторим процесс и получим систему вложенных брусов:

   $$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$$

   То есть на каждой стороне возникает последовательность вложенных отрезков, которые стягиваются в точку $a = (a_1, \ldots, a_n)$

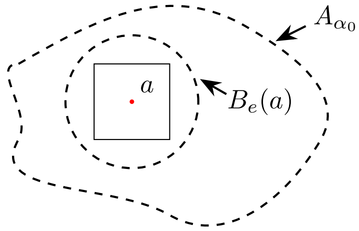
   

   Шаг 0 Шаг 1 Шаг 2 Предел

   Последовательность вложенных брусов в $\mathbb{R}^2$: на каждом шаге выбираем квадрат, что по предположению нельзя покрыть(выделен цветом) и делим его на 4 части. В итоге стягиваются в точку.

   При этом, $\exists a = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} I_i$

4. $a \in I \Longrightarrow a \in \bigcup A_\alpha \Longrightarrow \exists \alpha_0 : a \in \underbrace{A_{\alpha_0}}_{\text{открытое}} \Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$



Покрытие A_{α_0}

5. Из построения получили, что $I \supset I_1 \supset \ldots \supset a \Longrightarrow \exists N : \forall n > N \; I_n \subset B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$

   Получается, что $\forall n > N \; I_n$ покрывается одним лишь A_{α_0} из системы $\{A_\alpha\}$

   Получаем противоречие тому, что любое I_n не допускает конечного подпокрытия, а у нас получилось, что $I_n \in A_{\alpha_0} \forall n > N \Longrightarrow I$ – компакт □

Примечание. Любое ограниченное множество можно вписать в замкнутый брус. Потому что можно вокруг него описать шарик, который точно можно вписать в брус

3.6 Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$

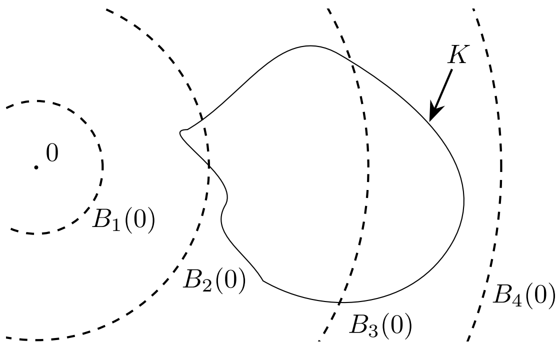
Теорема. $K \subset \mathbb{R}^n$. K — компакт $\Longleftrightarrow K$ замкнуто и ограниченно

Доказательство. Докажем необходимость ($\Longrightarrow$)

- *Ограниченность.* K — компакт $\Longrightarrow \forall \{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ — можно выделить конечное подпокрытие $\Longrightarrow$

  $\Longrightarrow$ Пусть $\{A_\alpha\} = \{B_n(0)\}_{n=1}^{\infty} \Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \; K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} B_n(0)$ и так как $B_n(0)$ — вложены шары $\Longrightarrow$

  $\Longrightarrow K \subset B_N(0) \Longrightarrow$ по определению K — ограничено



Пример покрытия K вокруг точки 0 с помощью шаров

- *Замкнутость.* Пойдем от противного. K — компакт, тогда возьмем $\{B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x)\}_{x \in K}$ — покрытие открытыми шарами, где $\delta(x) = \rho(x,x_0)$. x_0 — предельная точка, которая $\notin K$ (или же $\in \mathbb{R}^n \setminus K$)

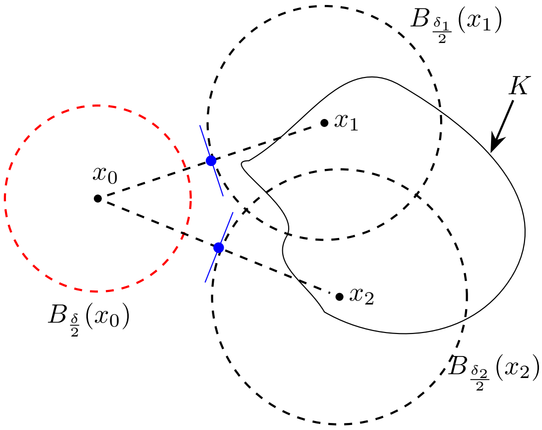
  Так как K — компакт, $\exists x_1, \ldots, x_s : K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{s} B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i)$

  Пусть $\delta = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} \delta(x_i)$, тогда

$$B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap \bigcup_{i=1}^{s} B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i) = \varnothing \Longrightarrow B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$$

$$\Longrightarrow \overset{\circ}{B}_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap K = \varnothing$$

  Значит, x_0 *не является предельной точкой* K, что противоречит нашему предположению



Пример как мы строим $B_{\frac{\delta}{2}}$ вокруг точки x_0.
Синие точки - середины отрезков на которых они лежат

Доказательство. Докажем достаточность

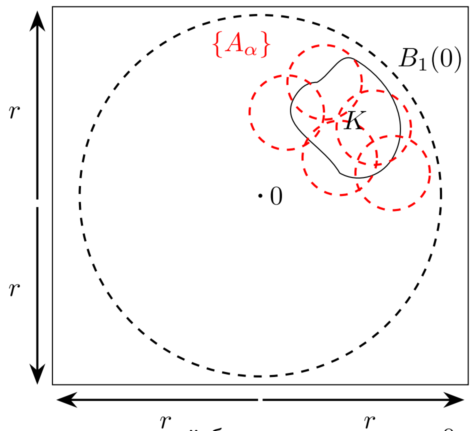
K — замкнуто и ограничено $\implies \exists r > 0 : B_r(0) \supset K \implies \exists I$ — замкнутый брус, такой что

$$K \subset I \text{ и } I = [-r; r]^n$$

Пусть $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ — произвольное покрытие открытыми множествами для K. Тогда, $I \subset \{A_\alpha\} \cup \underbrace{\{\mathbb{R}^n \setminus K\}}_{\text{открыто}}$. Так как I — компакт, то $\exists$ конечное подпокрытие

$$\{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m \cup \{\mathbb{R}^n \setminus K\} \supset I \supset K \text{ — покрытие для } I$$

Значит, $K \subset \{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m$ — конечное и $\{A_\alpha\}$ — произвольное, тогда K — компакт по определению □



Строим замкнутый брус вокруг точки 0, пользуясь
существованием конечного покрытия покрываем наш компакт K

3.7 Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте

Теорема. Пусть $K \in \mathbb{R}^n$ — компакт и функция $f : K \mapsto \mathbb{R}$ - непрерывная. Тогда f на K достигает наибольшее и наименьшее значения.

Доказательство.

- *Ограниченность.* От противного: пусть существует последовательность $\{x^k\} \subset K : |f(x^k)| > k$. Из ограниченности K следует ограниченность последовательности $\{x^k\}$, и как следствие ограничены последовательности отдельных координат:

$$|x_i^k| = \sqrt{|x_i^k|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i^k|^2} = ||x^k|| \leqslant C \quad \text{для некоторого } C$$

По теореме Больцано-Вейерштрасса у $\{x_1^k\}$ существует сходящаяся подпоследовательность $x_1^{k_{j_1}} \to a_1, j_1 \to \infty$. Для последовательности $\{x_2^{k_{j_1}}\}$ существует сходящаяся последовательность $x_2^{k_{j_2}} \to a_2, j_2 \to \infty$. И т.д. Получаем сходящуюся подпоследовательность:

$$x^{k_j} = (x_1^{k_j}, x_2^{k_J}, \ldots, x_n^{k_j}) \to (a_1, a_2, \ldots, a_n) = a$$

Точка a — предельная для K. В силу замкнутости K т. $a \in K$. А из непрерывности функции f получаем $f(x^{k_j}) \to f(a)$. А с другой стороны, $f(x^{k_j}) \to \infty$ из выбора исходной последовательности. **противоречие**

- *Достижение наибольшего (наименьшего) значения.* Итак, мы доказали, что f — ограничена на K. Выберем последовательность $\{x^k\}$:

$$\sup_K f - \frac{1}{k_j} \leq f(x^{k_j}) \leq \sup_K f$$

в силу непрерывности f:

$$\sup_K f \leq f(a) \leq \sup_K f$$

Получаем $f(a) = \sup\limits_K f$, т.е. максимальное значение достиигается в точке $x = a$. Для $\inf\limits_K f$ доказательство аналогично □

3.8 Теорема о связи непрерывности функции в точке с колебанием

Теорема. Пусть $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$; $f : M \mapsto \mathbb{R}$. f — непрерывна в точке $x_0 \iff \omega(f, x_0) = 0$

Доказательство.

- *Необходимость*

f — непрерывна в т. $x_0 \in M \implies \forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in B_\delta(x_0) \cap M = B_\delta^M(x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
Рассмотрим $\omega(f, x_0) := \lim\limits_{\delta \to 0+} \omega(f, B_\delta^M(x_0))$:

$$\omega(f, B_\delta^M(x_0)) = \sup_{x,y \in B_\delta(x_0)} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{x \in B_\delta(x_0)} |f(x) - f(x_0)| + \sup_{y \in B_\delta(x_0)} |f(y) - f(x_0)| \leq \frac{2\,\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

При $\varepsilon \to 0 \implies \delta \to 0$ и $\omega(f, B_\delta^M(x_0)) \to 0$, т.е. $\omega(f, x_0) = 0$

- *Достаточность*

Пусть $0 = \omega(f, x_0) := \lim\limits_{\delta \to 0+} \omega(f, B_\delta^M(x_0))$, т.е.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \quad \forall x, y \in B_\delta^M(x_0) \qquad \sup_{x,y \in B_\delta^M(x_0)} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Получаем, что

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta^M(x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \implies$$

□

3.9 Свойства интегральных сумм Дарбу

3.9.1 Нижняя сумма Дарбу не больше верхней

Теорема.

$$\underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) = \int_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$$

Доказательство.

$$\underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) = \sum_{i=1}^{K} m_i |I_i| = \sum_{i} \inf_{\xi_i}(f(\xi_i))|I_i| = \inf_{\xi} \sum_{i} f(\xi_i)|I_i| = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq$$
$$\sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i} (f(\xi_i))|I_i| = \sum_{i} M_i |I_i| = \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$$

3.9.2 Монотонность сумм относительно измельчений разбиения

Теорема. Пусть $\tilde{\mathbb{T}}$ — измельчение разбиения $\mathbb{T}$, тогда

$$\underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) \leq \underline{\mathrm{S}}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$$

□

Доказательство. Если $L \subset M$, то $\inf L \geq \inf M$ и $\sup L \leq \sup M$, тогда:

$$\underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) \leq \underline{\mathrm{S}}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \underset{\text{по } 3.9.1}{\leq} \overline{\mathrm{S}}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$$

□

3.9.3 Никакая нижняя сумма Дарбу не больше какой-либо верхней суммы на том же брусе

Теорема. $\forall \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 : \quad \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_1) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_2)$

Доказательство. $\forall \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ рассмотрим $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$, тогда по 3.9.2:

$$\underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_1) \leq \underline{\mathrm{S}}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_2)$$

□

3.10 Теорема об интегралах Дарбу как пределах интегральных сумм Дарбу

Теорема. Пусть $I \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус, а $f : I \mapsto \mathbb{R}$ — ограничена. Тогда:

$$\overline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \to 0} \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) \qquad \text{и} \qquad \underline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \to 0} \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$$

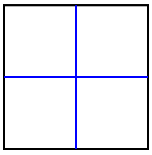
Доказательство. Докажем, что $\underline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \to 0} \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) \quad (= \sup_{\mathbb{T}} \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}))$

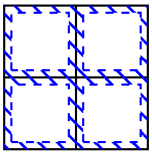
1. f-ограничена на $I \implies \exists C > 0 : \forall x \in I \quad |f(x)| \leqslant C$
2. т.к. по определению $\underline{I} = \sup_{\mathbb{T}} \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \mathbb{T}_1 = \{I_i^1\}_{i=1}^{m_1} :\ \underline{\mathcal{I}} - \varepsilon < \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_1) \leqslant \underline{\mathcal{I}} < \underline{\mathcal{I}} + \varepsilon$
3. Пусть $G = \bigcup_{i=1}^{m_1} \partial I_i^1$ - объединение границ брусов $I_i^1 \in \mathbb{T}_1$ (без повторов). Тогда G множество меры нуль по Лебегу (т.к. границы — мн-ва меры нуль по Лебегу)

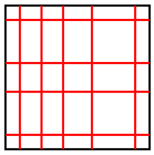
4. Пусть $\mathbb{T}_2$ - произвольное разбиение I : $\mathbb{T}_2 = \{I_i^2\}_{i=1}^{m_2}$
   Рассмотрим два множества брусов:

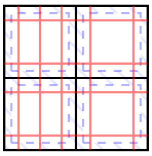
$$A = \{I_i^2 \in \mathbb{T}_2 : I_i^2 \cap G \neq \varnothing\} \qquad \text{и} \qquad B = \mathbb{T}_2 \setminus A \implies$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \mathbb{T}_2 : \Delta_{\mathbb{T}_2} < \delta \text{ верно, что } \sum_{I_i^2 \in A} |I_i^2| < \varepsilon$$

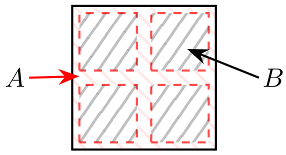
т.к. наши брусочки I_i^2 по построению лежат в G, а по 3 пункту оно множество меры нуль.


разбиение T_1


Граница G бруса T_1


Какое-то разбиение T_2


Как прошлые разбиения и граница G выглядят на одном рисунке



Как выглядят множества A и B

5. С другой стороны $\forall I_i^2 \in B$ верно, что $I_i^2 \in \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$

Хотим рассмотреть

$$|\underline{\mathcal{I}} - \underline{S}(f, \mathbb{T}_2)| = |I - \underline{S}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) + \underline{S}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) - \underline{S}(f, \mathbb{T}_2)| \leqslant \underbrace{|I - \underline{S}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2)|}_{*} + \underbrace{|\underline{S}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) - \underline{S}(f, \mathbb{T}_2)|}_{**}$$
$$< \varepsilon + 2C\,\varepsilon = \varepsilon(1 + 2C)$$

$\square$

* из пункта 2: $\underline{\mathcal{I}} - \varepsilon < \underline{S}(f, \mathbb{T}_1) \leqslant \underline{S}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) \leqslant \underline{\mathcal{I}} < \underline{\mathcal{I}} + \varepsilon \implies |\underline{\mathcal{I}} - \underline{S}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2)| < \varepsilon$

** Пояснение ниже

$$|\underline{S}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) - \underline{S}(f, \mathbb{T}_2)| = \left| \sum_{I_i^2 \in B} m_i |I_i^2| + \sum_{I_i \in \mathbb{T}_1 \cap A} m_i |I_i^2| - \sum_{I_i^2 \in B} m_i |I_i^2| - \sum_{I_i^2 \in A} m_i |I_i^2| \right| \quad \textit{Переход с равном по пункту 5}$$
$$\leqslant \left| \sum_{I_i \in \mathbb{T}_1 \cap A} m_i |I_i^2| \right| + \left| \sum_{I_i^2 \in A} m_i |I_i^2| \right|$$
$$\leqslant 2 \left| \sum_{I_i^2 \in A} m_i |I_i^2| \right| \quad \textit{Следующий переход по пункту 1}$$
$$\leqslant 2C \left| \sum_{I_i^2 \in A} |I_i^2| \right| \quad \textit{Следующий переход по пункту 4}$$
$$< 2C\,\varepsilon$$

3.11 Критерий Дарбу интегрируемости функции на замкнутом брусе

$I \in \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус, $f : I \mapsto \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}(I) \iff f$ — ограничена на I и $\underline{\mathcal{I}} = \overline{\mathcal{I}}$

Доказательство. Необходимость

- $f \in \mathcal{R}(I) \Longrightarrow$ по необходимому условию интегрируемости функции по Риману на замкнутом брусе, f — ограничена на I
- Покажем, что $\underline{\mathcal{I}} = \mathcal{I}, \overline{\mathcal{I}} = \mathcal{I} \Longrightarrow \underline{\mathcal{I}} = \overline{\mathcal{I}}$

  1. $f \in \mathcal{R}(I) \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall (\mathbb{T},\xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta \ |\sigma(f,\mathbb{T},\xi) - \mathcal{I}| < \varepsilon$
  2. $\underline{\mathcal{I}} = \sup\limits_{\mathbb{T}} \underline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T}) = \lim\limits_{\Delta \to 0} \underline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T}) \Longrightarrow |\,\underline{\mathcal{I}} - \underline{\mathrm{S}}\,| < \varepsilon$
     $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \ \exists \mathbb{T} : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta : |\,\underline{\mathcal{I}} - \underline{\mathrm{S}}\,| < \varepsilon$
  3. $\underline{\mathrm{S}}(\mathbb{T},\xi) = \inf\limits_{\xi} \sigma(f,\mathbb{T},\xi)$
     $\forall \mathbb{T}, \forall \varepsilon > 0 \ \exists \xi : |\,\underline{\mathrm{S}} - \sigma| < \varepsilon$

$|\mathcal{I} - \underline{\mathcal{I}}\,| \leqslant |\mathcal{I} - \underline{\mathcal{I}} - \sigma + \sigma + \underline{\mathrm{S}} - \underline{\mathrm{S}}\,| \leqslant |\mathcal{I} - \sigma| + |\,\underline{\mathcal{I}} - \underline{\mathrm{S}}\,| + |\sigma - \underline{\mathrm{S}}\,| < 3\,\varepsilon$ □

Доказательство. Достаточность

f — ограничена и $\underline{\mathcal{I}} = \overline{\mathcal{I}}$. Имеем

$$\underline{\mathrm{S}}(f,\mathcal{T}) = \inf_{\xi} \leqslant \sigma(f,\mathbb{T},\xi) \leqslant \sup_{\xi}(f,\mathbb{T},\xi) = \overline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T})$$

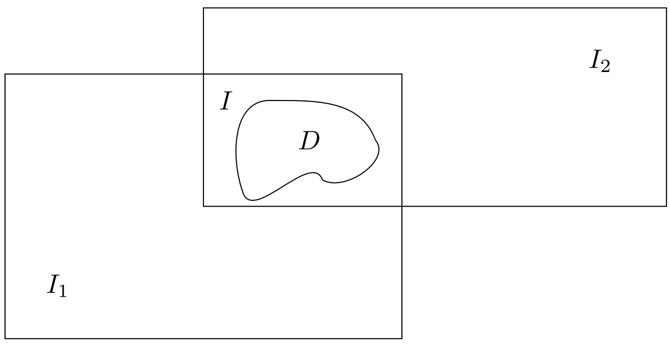
Тогда, при $\lim\limits_{\Delta_{\mathbb{T}} \to 0} \underline{\mathrm{S}} = \underline{\mathcal{I}}\,,\ \lim\limits_{\Delta_{\mathbb{T}} \to 0} \overline{\mathrm{S}} = \overline{\mathcal{I}}$ получаем $\underline{\mathcal{I}} = \overline{\mathcal{I}}$(Условие ограниченнсоти f даёт нам возможность применять неравенство выше) □

3.12 Утверждение о независимости определения допустимого множества от выбора бруса

Пусть $D \subset I_1 \subset \mathbb{R}^n, D \subset I_2 \subset \mathbb{R}^n$ - замкнутые брусы, тогда

$$\int\limits_{I_1} f \cdot \chi_D \mathrm{d}x \text{ и } \int\limits_{I_2} f \cdot \chi_D \mathrm{d}x$$

либо существуют и равны, либо оба не существуют вообще



Как выглядят наши множества I_1, I_2, I, D

Доказательство. Введем $I = I_1 \cap I_2 \supset D$, I не пустое по построению. Покажем существование

- $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \Longrightarrow$ по критерию Лебега $f \cdot \chi_D$ ограничена на $I_1 \Longrightarrow f \cdot \chi_D$ ограничена на $D \Longrightarrow f$ ограничена на $D \Longrightarrow f \cdot \chi_D$ ограничена на I_2

- $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \Longrightarrow$ по критерию Лебега $f \cdot \chi_D$ непрерывна почти всюду на $I_1 \Longrightarrow f \cdot \chi_D$ непрерынва почти всюду на $D \Longrightarrow$ в худшем случае для $f \cdot \chi_D$ на I_2 добавятся разрывы на $\partial D \Longrightarrow f \cdot \chi_D$ непрерынва почти всюду на I_2

- Тогда, $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \Longleftrightarrow f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_2)$

Покажем равенство

- Пусть $\mathbb{T}_i$ — разбиение на $I_i : \mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$ совпадают на I

- Пусть ξ^i — отмеченные точки для $\mathbb{T}_i$

- $\sigma(f\chi_D,\mathbb{T}_1,\xi^1) = \sum\limits_j f\chi_D(\xi_j^1)|I_j^1| = \sum\limits_j f(\xi_j^1)|I_j^1| = \sum\limits_j f(\xi_j^2)|I_j^2| = \sum\limits_j f\chi_D(\xi_j^2)|I_j^2| = \sigma(f\chi_D, \mathbb{T}_2, \xi^2)$

$\square$

Примечание. Все свойства интеграла Римана и критерия Лебега для бруса справедливы и для других допустимых множеств

3.13 Теорема Фубини о переходе к повторному интегралу

Пусть имеются $I_x \subset \mathbb{R}^n, I_y \subset \mathbb{R}^m, I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ — замкнутые брусы, $f : I_x \times I_y \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}(I_x \times I_y)$ и $\forall$ фиксированного $x \in I_x \implies f(x,y) \in \mathcal{R}(I_y) \Longrightarrow$

$$\int\limits_{I_x \times I_y} f(\overline{x}, \overline{y}) \mathrm{d}\overline{x}\mathrm{d}\overline{y} = \int\limits_{I_x} \left(\int\limits_{I_y} f(\overline{x},\overline{y}) \mathrm{d}\overline{y} \right) \mathrm{d}\overline{x} = \int\limits_{I_x} \mathrm{d}\overline{x} \int\limits_{I_y} f(\overline{x}, \overline{y}) \mathrm{d}\overline{y}$$

Примечание. аналагочино, если взять для $\forall$ фиксированного $y \in I_y$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $f \in \mathcal{R}(I_x \times I_y)$, $f \in \mathcal{R}(I_y)$, а также Критерием Дарбу

- $\mathbb{T}_x = \{I_i^x\}$ — разбиение на I_x, $\mathbb{T}_y = \{I_j^y\}$ — разбиение на I_y, $\mathbb{T}_{x,y} = \{I_i^x \times I_j^y\} = \{I_{ij}\}$ — разбиение на $I_x \times I_y$, и при этом верно $|I_i^x| \cdot |I_j^y| = |I_{ij}|$

-

$$\underline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T}_{x,y}) = \sum_{i,j} \inf_{(x,y) \in I_{ij}} f(x,y)|I_{ij}| \underset{\text{рис. ниже}}{\leqslant} \sum_{i,j} \inf_{x \in I_i^x} \left(\inf_{y \in I_j^y} f(x,y) \cdot |I_j^y| \right) |I_i^x| = \sum_i \inf_{I_i^x} \underbrace{\left(\sum_j \inf_{I_j^y} f(x,y)|I_j^y| \right)}_{\underline{\mathrm{S}}(f(y),\mathbb{T}_y)} |I_i^x|$$

$$\leqslant \sum_i \inf_{I_i^x} \underbrace{\left(\int\limits_{I_y} f(x,y) \mathrm{d}y \right)}_{g(x)} |I_i^x| \leqslant \underline{\mathrm{S}}(g(x),\mathbb{T}_x)$$

$$\leqslant \overline{\mathrm{S}}(g(x),\mathbb{T}_x)$$

$\underline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T}_{x,y}) \leqslant \underline{\mathrm{S}}(g(x),\mathbb{T}_x) \leqslant \overline{\mathrm{S}}(g(x), \mathbb{T}_x) \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T}_{x,y}) \Longrightarrow \exists \overline{\mathcal{I}} = \lim\limits_{\delta \to 0} \underline{\mathrm{S}}(g(x),\mathbb{T}_x) = \int\limits_{I_x \times I_y} f(\overline{x}, \overline{y}) \mathrm{d}\overline{x}\mathrm{d}\overline{y}$

Примечание. Последний знак неравенства, получен аналогичными действиями для длинного неравенства выше, просто развернув в обратную сторону знаки неравенства для sup

$\square$

3.14 Супремальный критерий равномерной сходимости функциональной последовательности

Теорема. $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \iff \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_D |f_n(x)-f(x)|\right) = 0$

Доказательство. Докажем необходимость ($\Longrightarrow$)

Заметим, что $\sup\limits_D |f_n(x)-f(x)| \geqslant 0$. Тогда,

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N, \forall x \in D \hookrightarrow \sup_D |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$$

$f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \Longrightarrow \forall\,\varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N,\ \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x)-f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

В худшем случае, $\sup\limits_D |f_n(x)-f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Доказательство. Докажем достаточность ($\Longleftarrow$)

$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \hookrightarrow \sup\limits_D |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$, тем более $\forall x \in D\ \sup \geqslant |f_n(x)-f(x)|$

Тогда, $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$ $\square$

Примечание. $f \rightrightarrows f \Longrightarrow f_n \longrightarrow f$, но в обратную сторону это не работает

3.15 Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности

Теорема. $f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x) \iff \forall\,\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n,m > N,\ \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Доказательство. $\Longrightarrow$ Докажем необходимость

Так как $f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$, то

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассмотрим $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x)-f(x)| + |f(x)-f_m(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Таким образом, мы показали, что $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n,m > N,\ \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ $\square$

Доказательство. $\Longleftarrow$ Докажем достаточность

Распишем определение равномерной сходимости:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n,m > N,\ \exists x \in D:\ |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Зафиксируем $x_0 \in D \Longrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$[1]

$$x_0 \in D : \forall\,\varepsilon > 0 \exists N : \forall n,m > N : |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

В худшем случае, $\forall x \in D :$ при $m \to \infty$ $|f_n(x)-f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Тогда,

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N\ \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$$

[1] по критерию Коши для числовой последовательности $f_n(x_0)$

$\square$

Примечание. Отрицание Критерия Коши:

$$f_n(x) \overset{D}{\not\rightrightarrows} f(x) \Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon_0 > 0\ \forall N:\ \exists n,m > N,\ \exists x_0 \in D\ |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \varepsilon_0$$

3.16 Теорема о почленном переходе к пределу для функциональной последовательности

Теорема. Пусть $f_n, f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка D, $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = c_n$

Тогда,

$$\exists \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{x\to x_0} f(x)$$
$$\left(\text{или } \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\right)$$

Доказательство. Сначала покажем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$, а потом что $\exists c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$

1. Рассмотрим $|c_n - c| \leqslant \underbrace{|c_n - f_n|}_{(a)} + \underbrace{|f_n - f_m|}_{(b)} + \underbrace{|f_m - c_m|}_{(c)} < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

   (a), (c) По условию, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = c_n$ получим

   $$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0) \cap D \hookrightarrow |f_n(x) - c_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

   (b) $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \Longrightarrow$ по Критерию Коши

   $$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n,m > N\ \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

   Получаем, что $\forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0)$

   Собираем: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n,m > N : \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0) : |c_n - c_m| < \varepsilon \Longrightarrow \exists c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ $\square$

2. Теперь покажем, что $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$, то есть $\forall\, \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0) : |f(x) - c| < \varepsilon$

   Рассмотрим $|f(x) - c| \leqslant \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{(a)} + \underbrace{|f_n(x) - c_n|}_{(b)} + \underbrace{|c_n - c|}_{(c)}$

   (a) $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f(x) \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n > N_1 \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = c_n \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta : \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0) \hookrightarrow |f_n(x) - c_n| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

   (c) По доказанному в п. 1 следует, что

   $$\exists \lim_{n\to\infty} c_n = c \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists N_2\ \forall n > N_2 \hookrightarrow |c_n - c| < \frac{\varepsilon}{3}$$

   Собираем: $\forall\, \varepsilon > 0\ (\exists N = \max(N_1, N_2))\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0) : |f(x) - c| < \varepsilon$ $\square$

3.17 Теорема о непрерывности предельной функции

Теорема. Пусть имеется $\left.\begin{array}{l} f_n, f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \\ f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f, \\ \forall n \in \mathbb{N}\ f_n \in C(D) \end{array}\right\} \Longrightarrow f \in C(D)$

Доказательство. Нужно доказать, что $f \in C(D)$. Значит, надо показать, что

$$\forall x_0 \in D : \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)|$$

Рассмотрим $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{(1)} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{(2)} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{(3)} < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

1. $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f : \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N,\ \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
2. Так как $\forall n \in \mathbb{N}\ f_n \in C(D) \Longrightarrow \forall x_0 \in D,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D \hookrightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
3. $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f : \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N,\ \forall x_0 \in D \hookrightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

Тогда, собрав три части, получим, что $\forall x_0 \in D$

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : (\exists N : \forall n > N)\ \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon &\Longrightarrow f(x) \in C(x_0)\ \forall x_0 \in D \\ &\Longrightarrow f(x) \in C(D)\end{aligned}$$

□

3.18 Утверждение о неравномерной сходимости фун. послед. наличии разрыва

Теорема. Пусть имеется $\left.\begin{aligned} & f_n \in C\left([a;b)\right), \\ & f \in C((a;b)) + \text{разрыв в т.} a, \\ & f_n \xrightarrow{[a;b)} f \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f_n \overset{(a;b)}{\not\rightrightarrows} f$

То есть будет поточечная сходимость, но не будет равномерной:

$$f_n \xrightarrow{(a;b)} f, \text{ но не } f_n \overset{(a;b)}{\rightrightarrows} f$$

Доказательство. От противного

1. Пусть $f_n \overset{(a;b)}{\rightrightarrows} f \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ \forall x \in [a;b) \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
2. $f_n \xrightarrow{[a;b)} f \Longrightarrow f_n(a) \longrightarrow f(a) \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 : \forall n > N_2 \hookrightarrow |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$
3. $f_n \overset{[a;b)}{\rightrightarrows} f$, так как $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = \max(N_1, N_2)\ \forall n > N,\ \forall x \in [a;b) \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
4. Получаем, что
$$\begin{cases} f_n \overset{[a;b)}{\rightrightarrows} f \\ f_n \in C([a;b)) \end{cases}$$
Тогда, по теореме о непрерывности предельной функции следует, что $f \in C([a;b))$, но f имеет разрыв в точке a. Противоречие

□

3.19 Утверждение о неравномерной сходимости фун. послед. при наличии расходимости в точке

Теорема. Пусть имеется $\left.\begin{matrix} f_n \in C\left([a;b)\right) \\ f_n \xrightarrow{(a;b)} f \\ \nexists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(a) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow f_n \overset{(a;b)}{\not\rightrightarrows} f$

Доказательство. От противного

1. Пусть $f_n \overset{(a;b)}{\rightrightarrows} f \Longrightarrow \forall\,\varepsilon > 0\ \exists N : \forall n,m > N\ \forall x \in (a;b) \hookrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
2. $f_n \in C([a;b))$, тогда

$$\forall x_0 \in [a;b) :\ \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in B_\delta(x_0) \cap [a;b) \hookrightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

   В частности, это верно для $x_0 = a$:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap (a;b)^{2} \hookrightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

3. Рассмотрим

$$|f_n(a) - f_m(a)| \leqslant \underbrace{|f_n(a) - f_n(x)|}_{\text{по п.2}} + \underbrace{|f_n(x) - f_m(x)|}_{\text{по п.1}} + \underbrace{|f_m(x) - f_m(a)|}_{\text{по п.2}} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

   получаем, что

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists N(\exists\delta > 0) :\ \forall n,m > N(\forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap (a;b)) \hookrightarrow |f_n(a) - f_m(a)| < \varepsilon$$

   то есть, по Критерию Коши для числовой последовательности $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$, что противоречит условию, а значит $f_n \overset{(a;b)}{\not\rightrightarrows} f$ □

3.20 Теорема о почленном интегрировании функциональной последовательности

Теорема. Пусть имеется $\left.\begin{matrix} f_n, f : [a;b] \to \mathbb{R} \\ f_n \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} f \\ f_n \in \mathcal{R}([a;b]) \forall n \in \mathbb{N} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow f \in \mathcal{R}([a;b])$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Доказательство. По Критерию Дарбу $f \in \mathcal{R}([a;b]) \Longleftrightarrow f$ — ограничена на $[a;b]$ и $\underline{\mathcal{I}} = \overline{\mathcal{I}}$

- Покажем *ограниченность*

  1. $\forall n \in \mathbb{N} :\ f_n \in \mathcal{R}([a;b]) \Longrightarrow f_n$ ограничена на $[a;b]$ и

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists M_n \geqslant 0\ \forall x \in [a;b] \hookrightarrow |f_n(x)| \leqslant M_n$$

  2. $f_n \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} f$, тогда $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists N :\ \forall n > N\ \forall x \in [a;b] \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
     Рассмотрим $\varepsilon = 1$, тогда $\exists N_1 = N :\ \forall x \in [a;b] \hookrightarrow |f_{N_1+1}(x) - f(x)| < 1$
     Тогда, для $f(x)$ верно $\forall x \in [a;b]$

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f_{N_1+1}(x)| + |f_{N_1+1}(x)| < 1 + M_{N_1+1},$$

     то есть $f(x)$ — ограничена

[2] верно $\forall x \in B_\delta(a) \cap [a;b)$, а потому a выколота

- Покажем *интегрируемость*

  Напомним, что $\overline{\mathcal{I}} = \lim\limits_{\Delta_{\mathbb{T}}\to 0} \overline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T})$ и $\underline{\mathcal{I}} = \lim\limits_{\Delta_{\mathbb{T}}\to 0} \underline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T})$

  Рассмотрим $\mathbb{T}$ — разбиение $[a;b]$

$$|\,\underline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T}) - \overline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T})| \leqslant \underbrace{|\,\underline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T}) - \underline{\mathrm{S}}(f_n,\mathbb{T})|}_{(1)} + \underbrace{|\,\underline{\mathrm{S}}(f_n,\mathbb{T}) - \overline{\mathrm{S}}(f_n,\mathbb{T})|}_{(2)} + \underbrace{|\,\overline{\mathrm{S}}(f_n,\mathbb{T}) - \overline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T})|}_{(3)}$$

  (1) Распишем в виде неравенств

$$|\,\underline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T}) - \underline{\mathrm{S}}(f_n,\mathbb{T})| \leqslant \sum_i |\inf_{I_i}(f) - \inf_{I_i}(f_n)||I_i| \leqslant \sum_i \sup_{I_i} |f - f_n| \cdot |I_i| \leqslant \sup_{[a;b]} |f - f_n| \cdot |b-a| < \frac{\varepsilon}{3}$$

  Так как $f_n \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} f$, то по супремальному критерию:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N \hookrightarrow \sup_{[a;b]} |f - f_n| < \frac{\varepsilon}{3|b-a|}$$

  (2) $f_n \in \mathcal{R}([a;b]) \Longrightarrow$

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ \forall\mathbb{T}:\ \Delta_{\mathbb{T}} < \delta\ |\,\underline{\mathrm{S}}(f_n,\mathbb{T}) - \overline{\mathrm{S}}(f_n,\mathbb{T})| < \frac{\varepsilon}{3}$$

  (3) Аналогично (1): $|\,\overline{\mathrm{S}}(f_n,\mathbb{T}) - \overline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T})| \leqslant \sup\limits_{[a;b]} |f - f_n| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

  Получаем, что

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ (\exists N)\ \forall\mathbb{T}:\ \Delta_{\mathbb{T}} < \delta\ (\forall n > N) \hookrightarrow |\,\underline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T}) - \overline{\mathrm{S}}(f,\mathbb{T})| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

  $\Longrightarrow f(x) \in \mathcal{R}([a;b])$

- Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$

  Рассмотрим

$$\left| \int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \sup_{[a;b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot |b-a| < \varepsilon$$

  Так как $f_n \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} f$, то $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N\ \sup\limits_{[a;b]} |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{|b-a|}$ и получаем, что

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N \hookrightarrow \left| \int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$$

$\square$

3.21 Теорема о почленном дифференцировании функциональной последовательности

Теорема. Пусть имеется $\left.\begin{array}{l} f_n, f, g : [a;b] \to \mathbb{R} \\ f_n \in D([a;b]) \\ \exists c \in [a;b] : \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(c) \\ \exists g(x):\ f_n' \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} g(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \exists f:\ f_n \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} f \\ \oplus\ f'(x) = g(x) \end{array}$

Доказательство. Покажем *существование*

Теорема. (Лагранжа) $f \in C([a,b])$, $f \in D((a,b)) \Longrightarrow \exists c \in (a,b):\ f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

1. Рассмотрим $\varphi(x) = f_n(x) - f_m(x)$

2. $\forall n \in \mathbb{N}\ f_n \in D([a;b]) \Longrightarrow f_n \in C([a;b]) \Longrightarrow \varphi(x) \in D([a;b])$ и $\varphi(x) \in C([a;b])$

3. Рассмотрим: для c из условия теоремы Лагранжа

$$\varphi(x) - \varphi(c) = \varphi'(\xi) \cdot (x - c), \text{ где } \xi \in [c;x]\ ([x;c])$$

   Тогда, $\varphi(x) = \varphi'(\xi)(c-x) + \varphi(x)$

4. Оценим $|\varphi(x)| \leqslant |\varphi'(\xi)| \cdot |c-x| + |\varphi(c)| = \underbrace{|f'_n(\xi) - f'_m(\xi)|}_{\star} \cdot |c-x| + \underbrace{|f_n(c) - f_m(c)|}_{\star\star}$

   $\star\ f'_n \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} g(x) \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists N_1:\ \forall n,m > N_1\ \forall x \in [a;b] \hookrightarrow |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| < \dfrac{\varepsilon}{2|b-a|}$
   $\star\star\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(c) \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists N_2:\ \forall n,m > N_2 \hookrightarrow |f_n(c) - f_m(c)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
   Тогда,

$$|\varphi(x)| \leqslant |\varphi'(\xi)| \cdot |c-x| + |\varphi(c)| = \underbrace{|f'_n(\xi) - f'_m(\xi)|}_{\star} \cdot |c-x| + \underbrace{|f_n(c) - f_m(c)|}_{\star\star} < \frac{\varepsilon}{2|b-a|} \cdot |c-x| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

   то есть

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N = \max\{N_1,N_2\}:\ \forall n,m > N\ \forall x \in [a;b] \hookrightarrow |\varphi(x)| = |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \Longrightarrow \exists f: f_n \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} f$$

Доказательство. Покажем, что $f'(x) = g(x)$

Пусть имеется $x_0 \in [a;b]$, но он произвольный

1. Рассмотрим $\psi_n(x) = \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$

   Покажем по Критерию Коши, что $\psi_n(x) \overset{[a;b]}{\rightrightarrows}$

$$\begin{aligned}
|\psi_n(x) - \psi_m(x)| &= \left|\frac{f_n(x) - f_n(x_0) - f_m(x) + f_m(x_0)}{x - x_0}\right| \\
&= \left|\frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))}{x - x_0}\right| \\
&= \left|\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}\right| \\
&\exists \xi \in [x_0, x] \\
&= \frac{|\varphi'(\xi)||x - x_0|}{|x - x_0|} \\
&= |\varphi'(\xi)| \\
&= |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| < \varepsilon
\end{aligned}$$

   так как $f_n \overset{[a;b]}{\rightrightarrows}$, то есть

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists N, \forall n,m > N, \forall x \in [a,b] \hookrightarrow |f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon$$

   то $\psi \overset{[a;b]}{\rightrightarrows}$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \lim\limits_{x\to x_0} \psi_n(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = f'_n(x_0)$, так как $f_n \in D([a,b])$

Получаем, что $\psi_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$ и $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \lim\limits_{x \to x_0} \psi_n(x) = f_n'(x_0)$, тогда по теореме о почленном переходе к пределу

$$\begin{aligned} g(x_0) &= \lim_{n\to\infty} f_n'(x_0) \\ &= \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} \psi_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$

□

3.22 Сравнительный признак равномерной сходимости функционального ряда

Теорема. Имеется $\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ и } \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x): \\ \exists N\ \forall n > N\ \forall x \in D\ |a_n(x)| \leqslant b_n(x) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится абсолютно D

Доказательство. Докажем по критерию Коши

$$(\star) \quad |a_{m+1}(x) + \ldots + a_k(x)| \leqslant |a_{m+1}(x)| + \ldots + |a_k(x)| \underset{\forall m,k>N \forall x \in D}{\leqslant} b_{m+1}(x) + \ldots + b_k(x) \underset{\forall m,k>N_1 \forall x \in D}{<} \varepsilon$$

Получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \widetilde{N} = \max\{N, N_1\} : \forall k > m > \widetilde{N}\ \forall x \in D \hookrightarrow |a_{m+1}(x) + \ldots + a_k(x)| < \varepsilon \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows}$$

Так как $(\star)$ выполняется для любого $x \in D$, то $\forall x_0 \in D$ выполняется

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \widetilde{N} = \max\{N, N_1\} : \forall k > m > \widetilde{N} \hookrightarrow |a_{m+1}(x)| + \ldots + |a_k(x)| < \varepsilon,$$

то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n(x_0)|$ — сходится, а значит сходится абсолютно $\forall x_0 \in D$ □

3.23 Мажорантный признак Вейерштрасса о равномерной сходимости функционального ряда

Следствие. $\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x): \\ \exists N\ \forall n > N\ \sup\limits_{D} |a_n(x)| \leqslant M_n \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n \text{ — сходится} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \overset{D}{\rightrightarrows} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится абсолютно на } D \end{array}$

Доказательство. Если в признаке сравнения принять, что $\forall n \in \mathbb{N}\ b_n(x) = M_n = \mathrm{const}(n)$, то условие теоремы выполняется □