

# Математический Анализ - 2

Серёжа Рахманов | [telegram](#), [website](#)

Максим Николаев | [telegram](#)

Версия от 27.02.2023 13:04

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция 1 - 01.09.2020 - Ряды</b>	<b>3</b>
1.1	Определение ряда . . . . .	3
1.2	Необходимое условие сходимости . . . . .	3
1.3	Критерий Коши . . . . .	3
1.4	Положительные ряды . . . . .	4
1.5	Признаки сравнения . . . . .	4
1.6	Отсутствие универсального ряда сравнения . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Лекция 2 - 08.09.2020 - Положительные ряды</b>	<b>6</b>
2.1	Признак Лобачевского-Коши . . . . .	6
2.2	Теорема Штольца и оценка частичных сумм гармонического ряда . . . . .	6
2.3	Признак Даламбера и радикальный признак Коши . . . . .	7
2.4	Радикальный признак сильнее признака Даламбера . . . . .	7
2.5	Признак Гаусса . . . . .	7
2.6	Сравнение с интегралом . . . . .	8
2.7	Улучшение сходимости ряда . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Лекция 3 - 15.09.2020 - Знакопеременные ряды</b>	<b>9</b>
3.1	Абсолютная и условная сходимость . . . . .	9
3.2	Мажорантный признак Вейерштрасса . . . . .	9
3.3	Группировка членов ряда . . . . .	9
3.4	Знакопередающиеся ряды, пр-к Лейбница . . . . .	10
3.5	О неприменимости эквивалентности . . . . .	10
3.6	Признаки Дирихле и Абеля . . . . .	10
3.7	Влияние перестановки членов ряда на его сумму . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Лекция 4 - 22.09.2020</b>	<b>12</b>
4.1	Умножение рядов . . . . .	12
4.2	Бесконечное произведение . . . . .	12
4.2.1	Основные понятия . . . . .	12
4.2.2	Сходимость бесконечного произведения . . . . .	12
4.2.3	Абсолютная сходимость бесконечного произведения . . . . .	12
4.3	Функциональные последовательности . . . . .	13
4.3.1	Поточечная и равномерная сходимость . . . . .	13
4.3.2	Равномерная норма. Критерий Коши . . . . .	13
4.3.3	Теорема Дини . . . . .	13

<b>5</b>	<b>Лекция 5 - 29.09.2020 - Исследование сходимости функциональных рядов</b>	<b>14</b>
5.1	Свойства равномерно сходящейся последовательности	14
5.2	Равномерная сходимость функционального ряда	14
5.3	Необходимое условие равномерной сходимости	14
5.4	Критерий Коши равномерной сходимости	14
5.5	Признаки Вейерштрасса и Даламбера	15
5.6	Признак Лейбница	15
5.7	Признаки Дирихле и Абеля	15
5.8	Свойства равномерно сходящегося ряда	15
<b>6</b>	<b>Лекция 6 - 6.10.2020 - Степенные ряды</b>	<b>17</b>
6.1	Основные понятия	17
6.2	Теорема Абеля, радиус и интервал последовательности	17
6.3	Равномерная сходимость степенного ряда	17
6.4	Сходимость ряда в граничных точках интервала сходимости	17
6.5	Дифференцирование и интегрирование степенного ряда	18
6.6	Бесконечное дифференцирование	18
6.7	Ряд Тейлора	18
6.7.1	Ряды Тейлора основных элементарных функций	18
<b>7</b>	<b>Лекция 7 - 27.10.2020 - Мера Жордана</b>	<b>19</b>
7.1	Мера на кольце множеств	19
7.2	Ограниченные полуинтервалы в $\mathbb{R}^m$	19
7.3	Кольцо простых множеств	19
7.4	Внешняя $m$ -мерная мера Жордана	20
7.5	Измеримость по Жордану	20
7.6	Интегрируемость функции по Риману и измеримость по Жордану её подграфика	20

# 1 Лекция 1 - 01.09.2020 - Ряды

## 1.1 Определение ряда

**Определение 1.** Пусть  $a_n$  – последовательность, т.е.  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Формальная бесконечная сумма:  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

называется рядом.  $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$  – частичная сумма, сумма ряда:  $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$

Возможны 3 случая:

1.  $\exists S \in \mathbb{R}$
2.  $\exists S = \infty$
3.  $\nexists S$

В первом случае говорят, что ряд сходится, иначе – что ряд расходится.

*Пример.*

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = \infty$

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - \dots$  не существует

**Определение 2.** Если ряд сходится, т.е.  $S_N \rightarrow S$  при  $N \rightarrow \infty$ , то  $S - S_N = r_N$  – остаток ряда

$$r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n, r_N \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty$$

## 1.2 Необходимое условие сходимости

**Замечание.** Если ряд сходится, то  $a_n \rightarrow 0$

*Доказательство.*  $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$ , т.к.  $S_n \rightarrow S$  и  $S_{n-1} \rightarrow S$  ■

## 1.3 Критерий Коши

**Определение 3.**  $a_n$  называется фундаментальной, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > m > N \implies |S_n - S_m| < \varepsilon$

**Теорема 1.1.**  $S_n$  – сходится  $\Leftrightarrow S_n$  – фундаментальная

*Доказательство.*  $S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^n a_k$  Тогда  $\sum a_n$  – сходится  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > m > N |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon$  ■

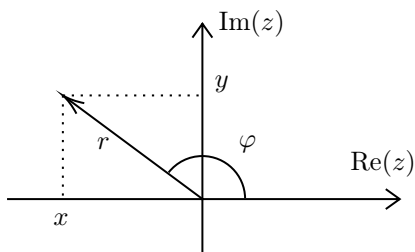
*Пример.*

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Заметим, что  $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1} \rightarrow 1$

Этот ряд сходится при  $N \rightarrow \infty$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

2.  $z \in \mathbb{C}, z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$



Рассмотрим ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$

$$S_N = 1 + z + z^2 + \dots + z^N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$$

Ряд сходится  $\Leftrightarrow |z| < 1$

$$|z| < 1 \Rightarrow z^n \rightarrow 0, S_N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \rightarrow \frac{1}{1 - z}$$

## 1.4 Положительные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0, S_n \uparrow, \text{ т.к. } S_{n+1} \geq S_n$$

Возможны 2 случая:

1.  $\exists S \in \mathbb{R}$

2.  $\exists S = \infty$

**Обозначение 1.**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$  – ряд сходится,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$  – ряд расходится.

## 1.5 Признаки сравнения

1. Сравнение с помощью неравенства.

$$a_n \leq b_n \text{ при всех } n \geq n_0$$

Ряд  $\sum b_n$  сходится  $\implies$  ряд  $\sum a_n$  сходится

Ряд  $\sum a_n$  расходится  $\implies$  ряд  $\sum b_n$  расходится

2. Сравнение отношений.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \text{ при всех } n \geq n_0$$

Ряд  $\sum b_n$  сходится  $\implies$  ряд  $\sum a_n$  сходится

Ряд  $\sum a_n$  расходится  $\implies$  ряд  $\sum b_n$  расходится

*Доказательство.*

$$a_{n_0+1} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$$

$$a_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$$

$\vdots$

$$a_{n_0+k} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k} \implies \sum_{n=n_0}^N a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum_{n=n_0}^N b_n$$

■

3. Сравнение с помощью предела.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0; +\infty) \implies \text{сходимость } \sum a_n \iff \text{сходимость } \sum b_n$$

Доказательство.

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$$

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : c - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq c + \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

$$\text{Возьмём } \varepsilon : c - \varepsilon > 0 \implies (c - \varepsilon) \cdot b_n \leq a_n \leq (c + \varepsilon) \cdot b_n$$

Сходимость следует из правой части неравенства, а расходимость из левой. ■

## 1.6 Отсутствие универсального ряда сравнения

**Предложение.** Не существует ряда  $\sum c_n, c_n > 0$  :

1)  $\frac{a_n}{c_n} \rightarrow 0 \implies$  ряд  $\sum a_n$  сходится.

2)  $\frac{b_n}{c_n} \rightarrow \infty \implies$  ряд  $\sum b_n$  расходится.

Доказательство.

1. Если ряд  $\sum c_n$  расходится, то пусть  $S_N = \sum_{n=1}^N c_n \rightarrow \infty, S_0 = 0$ , тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}})}_{a_n}$  расходится так как:

$$(a) \sum_{n=1}^N (\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}) = \sqrt{S_1} - \sqrt{S_0} + \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} + \dots + \sqrt{S_N} - \sqrt{S_{N-1}} = \sqrt{S_N} - \sqrt{S_0} = \sqrt{S_N} \rightarrow \sqrt{S}$$

$$(b) \frac{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}{c_n} = \frac{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}{S_n - S_{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}} \implies \frac{a_n}{c_n} \rightarrow 0$$

Ряд расходится, но по предположению сходится, получили противоречие.

2. Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  сходится, то рассмотрим  $r_n$  - его  $n$ -ый остаток, тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n})}_{b_n}, r_0 = S = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$  сходится, так как:

$$(a) \sum_{n=1}^N (\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}) = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_1} + \sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} + \dots + \sqrt{r_{N-1}} - \sqrt{r_N} = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_N} = \sqrt{S} - \sqrt{r_N} \rightarrow \sqrt{S}, \text{ т.к. } r_N \rightarrow 0$$

$$(b) \frac{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}{c_n} = \frac{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}{r_{n-1} - r_n} = \frac{1}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}} \rightarrow \infty, \text{ т.к. } \sqrt{r_{n-1}} \rightarrow 0 \text{ и } \sqrt{r_n} \rightarrow 0$$

Ряд сходится, но по предположению расходится, получили противоречие. ■

## 2 Лекция 2 - 08.09.2020 - Положительные ряды

### 2.1 Признак Лобачевского-Коши

**Предложение.** Пусть  $a_n > 0$  и  $a_n \downarrow$

Тогда ряды  $\sum a_n$  и  $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$  ведут себя одинаково

*Доказательство.*  $a_1 + (a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + \dots + a_8) + \dots$

$$a_1 \geq a_2 \geq a_2$$

$$2a_2 \geq a_3 + a_4 \geq 2a_4$$

$$4a_4 \geq a_5 + \dots + a_8 \geq 4a_8$$

⋮

$$a_1 + \sum_{n=0}^{m-1} 2^n a_{2^n} \geq \sum_{n=1}^{2^m} a_n \geq a_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m 2^n a_{2^n}$$

*Пример.*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  – обобщённый гармонический ряд,  $p > 0$

$$a_n = \frac{1}{n^p} \downarrow, \quad a_{2^n} = \frac{1}{(2^n)^p}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^n)^{p-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{p-1}} \right)^n$$

Это сумма геометрической прогрессии со знаменателем  $q = \frac{1}{2^{p-1}}$

$q < 1 \iff p > 1$  – ряды сходятся, например:  $\sum \frac{1}{n^{1,001}}$ ,  $\sum \frac{1}{n^2}$

$q \geq 1 \iff p \leq 1$  – ряды расходятся, например:  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ ,  $\sum \frac{1}{n}$

*Пример.*  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p n}$ ,  $p > 0$

$$\frac{1}{n \cdot \ln^p n} \downarrow, \quad a_{2^n} = \frac{1}{2^n \cdot \ln^p 2^n} = \frac{1}{2^n \cdot n^p \cdot \ln^p 2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \cdot n^p \cdot \ln^p 2} = \frac{1}{\ln^p 2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

### 2.2 Теорема Штольца и оценка частичных сумм гармонического ряда

Гармонический ряд:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \ln n$$

$$B_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$A_n \uparrow, B_n \downarrow$$

$$B_n > A_n$$

$$B_1 > \dots > B_{n-1} > B_n > A_n > A_{n-1} > \dots > A_1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$B_n - A_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Значит,  $\exists \lim A_n = \lim B_n = \gamma \approx 0.5772\dots$  – число Эйлера-Маскерони

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} = \ln N + \gamma + o(1)$$

**Теорема 2.1.** (Штольца.) Если  $p_n, q_n \rightarrow 0, q_n \downarrow$  и  $\exists \lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$ , то  $\lim \frac{p_n}{q_n} = \lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$

Теперь с помощью теоремы Штольца уточним остаточный член у гармонического ряда:

$$\lim \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n - \gamma}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \lim \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n} \cdot \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)} \stackrel{\heartsuit}{=}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Получаем, что  $\varlimsup \frac{1}{-\frac{2n^2}{1}} = \frac{1}{2}$

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \underbrace{\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{o(1)}$$

Так как

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$$

### 2.3 Признак Даламбера и радикальный признак Коши

**Теорема 2.2.** *Признак Даламбера.* Пусть  $a_n > 0$ .

$$\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расходится.}$$

**Теорема 2.3.** *Радикальный признак Коши.* Пусть  $a_n \geq 0$ .

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

$$\underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расходится.}$$

Пример.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n!}, \quad p > 0$

$$a_n = \frac{p^n}{n!}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{p^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{p^n} = \frac{p}{n+1} \rightarrow 0 < 1 \implies \text{ряд сходится по признаку Даламбера.}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{p^n}{n!}} = \frac{p}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0 < 1 \implies \text{ряд сходится по радикальному признаку Коши. } (\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty)$$

### 2.4 Радикальный признак сильнее признака Даламбера

Пусть  $a_n > 0$ . Тогда:

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Если  $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1$

Если  $\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$

Если  $\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , то  $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \implies \exists \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$

### 2.5 Признак Гаусса

(Сравнение с  $\sum \frac{1}{n^p}$ )

Если  $\exists \delta > 0, p: \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)$  то:

$p > 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$

$p \leq 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расходится.}$

## 2.6 Сравнение с интегралом

Рассмотрим  $f(x) \downarrow$  при  $x \geq n_0 - 1$  и ряд  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ , где  $a_n = f(n)$

$$f(n+t) \leq a_n \leq f(n-1+t), t \in [0; 1]$$

$$\int_0^1 dt : \int_n^{n+1} f(x) dx \leq a_n \leq \int_{n-1}^n f(x) dx$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} : \int_{n_0}^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{n=n_0}^N a_n \leq \int_{n_0-1}^N f(x) dx$$

$\Rightarrow \sum a_n$  ведёт себя так же как несобственный интеграл  $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$

## 2.7 Улучшение сходимости ряда

*Пример.*  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Для улучшения сходимости будем пользоваться рядами такого типа:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}, \quad \dots$$

Такие ряды достаточно легко считаются, в нашем примере воспользуемся первым т.к.  $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) = S - 1 \Rightarrow S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

$$\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2} \cdot \left( \frac{1}{1+\frac{2}{n^2}} - \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n^2} \cdot \left( 1 - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left( 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Слагаемые убывают быстрее, чтобы получить число с определённой точностью потребуется значительно меньше слагаемых.

Получили, что  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} \approx 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$



### 3 Лекция 3 - 15.09.2020 - Знакопеременные ряды

#### 3.1 Абсолютная и условная сходимость

Определение 4.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{R}$

Если  $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ , то ряд называется знакопеременным.

Пусть  $\sum a_n$  сходится

Определение 5. Рассмотрим дополнительный ряд  $\sum |a_n|$  (\*)

Если (\*) сходится, то  $\sum a_n$  называется сходящимся абсолютно

Если (\*) расходится, то  $\sum a_n$  называется сходящимся условно

Определение 6. Введём  $a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n > 0 \\ 0 & \end{cases}$   $a_n^- = \begin{cases} |a_n|, & a_n < 0 \\ 0 & \end{cases}$

Ряды  $\sum a_n^+, \sum a_n^-$  называются положительной и отрицательной частью исходного ряда  $\sum a_n$

$$S_N^+ = \sum_{n=1}^N a_n^+, S_N^- = \sum_{n=1}^N a_n^-$$

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, |a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_N^+ - S_N^-, \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_N^+ + S_N^-$$

Замечание. Ряд  $\sum a_n$  сходится абсолютно  $\iff$  оба ряда  $\sum a_n^+, \sum a_n^-$  сходятся Ряд  $\sum a_n$  сходится условно  $\implies$  оба ряда  $\sum a_n^+, \sum a_n^-$  расходятся

#### 3.2 Мажорантный признак Вейерштрасса

Теорема 3.1. Если  $|a_n| \leq b_n$  при  $n > n_0$  и положительный ряд  $\sum b_n$  сходится, то  $\sum a_n$  сходится, причём абсолютно.

Пример.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}, p > 0$

$$|\sin(nx)| \leq 1 \implies \left| \frac{\sin(nx)}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p}$$

$\sum \frac{1}{n^p}$  сходится ( $p > 1$ )  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}$  сходится абсолютно.

#### 3.3 Группировка членов ряда

Говорят, что ряд  $\sum b_k$  получен из  $\sum a_n$  группировкой членов, если  $\exists n_1 < n_2 < \dots$ :

$$b_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}$$

$$b_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}$$

...

Замечание. Если  $\sum a_n$  сходится, то ряд  $\sum b_k$  сходится к той же сумме.

Доказательство.  $\sum_{k=1}^m b_k = \sum_{n=1}^{n_m} a_n$  ■

Обратное утверждение неверно:  $(1-1) + (1-1) + \dots$

Знакопеременный ряд при помощи группировки сводится к знакопеременному:

$$a_1 \leq 0, \dots, a_{n_1} \leq 0; b_1 = \sum_{i=1}^{n_1} a_i \leq 0$$

$$a_{n_1+1} \geq 0, \dots, a_{n_2} \geq 0; b_2 = \sum_{i=n_1+1}^{n_2} a_i \leq 0$$

При такой группировке сходимость исходного ряда  $\iff$  сходимость  $\sum b_n$

Пример.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$

$\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ , где  $b_k = (-1)^k$

$|b_k| = \sum_{n=[e^k]+1}^{[e^{k+1}]}$   $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{[e^k]+1} \cdot ([e^{k+1}] - [e^k]) \approx \frac{e^{k+1} - e^k}{e^k} \rightarrow e - 1 > 0$

### 3.4 Знакопередающиеся ряды, пр-к Лейбница

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где  $a_n = (-1)^n \cdot u_n$ ,  $u_n > 0$

Теорема 3.2. Признак Лейбница. Если  $u_n \downarrow 0$ , то ряд сходится, причём  $|r_n| \leq u_{n+1}$

Пример.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ ,  $p > 0$

$\frac{1}{n^p} \downarrow 0 \implies$  ряд сходится (при  $\forall p > 0$ )

При этом  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  – сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ :  $p \in (0; 1]$  – сходится условно,  $p \in (1; +\infty)$  – абсолютно

### 3.5 О неприменимости эквивалентности

Рассмотрим 2 ряда:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \approx \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

При этом правый ряд сходится по признаку Лейбница, а левый – расходится:

$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - (-1)^n)} \approx \frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - (-1)^n)} \rightarrow \infty$

### 3.6 Признаки Дирихле и Абеля

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$

Теорема 3.3. Признак Дирихле. Если  $a_n \downarrow 0$ , а частичные суммы  $\left| \sum_{n=1}^N b_n \right| \leq C$  ограничены, то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$  сходится.

Теорема 3.4. Признак Абеля. Если  $a_n$  монотонна и ограничена, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится, то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$  сходится.

$a_n \rightarrow a$ ,  $a_n = a + \alpha_n$ ,  $\alpha_n \downarrow 0$ ;  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n = a \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot b_n$

Пример.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}$ ,  $p > 0$

$a_n = \frac{1}{n^p} \downarrow 0$ ,  $b_n = \sin nx$

$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_N = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin Nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos((N + 1/2)x)}{2 \sin \frac{x}{2}}$ ;  $\left| \sum_{n=1}^N b_n \right| \leq \frac{2}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$

Ряд сходится по признаку Дирихле

### 3.7 Влияние перестановки членов ряда на его сумму

Пусть  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  – биекция

Говорят, что ряд  $\sum b_n$  получен из  $\sum a_n$  перестановкой членов, если  $b_n = a_{f(n)}$

Если ряд  $\sum a_n$  сходится абсолютно, то  $\forall$  ряд, полученный из него перестановкой членов, сходится абсолютно к той же сумме.

*Теорема 3.5. (Римана) Если ряд  $\sum a_n$  сходится условно, то для  $\forall S \in [-\infty; +\infty]$  то  $\exists$  перестановка  $f$  такая, что  $\sum a_{f(n)} = S$*

## 4 Лекция 4 - 22.09.2020

### 4.1 Умножение рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{m=1}^{\infty} b_m$$
$$\left( \sum_{k=1}^K a_k \right) \cdot \left( \sum_{m=1}^M b_m \right) = \sum_{1 \leq k \leq K, 1 \leq m \leq M} a_k \cdot b_m$$

Если эта сумма имеет предел при  $K, M \rightarrow \infty$ , не зависящий от порядка суммирования, то говорят, что определено произведение рядов.

*Теорема 4.1. (Коши) Если  $\sum a_k, \sum b_m$  сходятся абсолютно, то определено их произведение.*

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \cdot \left( \sum_{m=1}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \cdot b_{m_n}$$

Произведение рядов по Коши:

$$c_2 = a_1 \cdot b_1$$

$$c_3 = a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2$$

$$c_4 = a_3 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_3$$

...

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \cdot \left( \sum_{m=1}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n$$

### 4.2 Бесконечное произведение

#### 4.2.1 Основные понятия

$$\prod_{n=1}^N a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_N - \text{частичное произведение.}$$

Бесконечным произведением называют формальную запись  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$

Значением бесконечного произведения является предел частичного произведения:

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N a_n$$

#### 4.2.2 Сходимость бесконечного произведения

Необходимое условие сходимости:

$$\text{Если } P_N = \prod_{n=1}^N a_n \text{ сходится, то } a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \rightarrow 1$$

$$\prod_{n=1}^N a_n = e^{\ln \prod_{n=1}^N a_n} = e^{\sum_{n=1}^N \ln a_n}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = P \iff \sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n = \ln P \quad (P \neq 0, a_n \rightarrow 1)$$

Пусть  $a_n \geq 1$ . Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$  - положительный ряд

$$\ln a_n = (a_n - 1) + o(1), \text{ т. к. } a_n \rightarrow 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n \text{ сходится} \iff \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1) \text{ сходится.}$$

#### 4.2.3 Абсолютная сходимость бесконечного произведения

$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  называется абсолютно сходящимся, если абсолютно сходится соответствующий ему ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$

*Замечание.*  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится абсолютно  $\iff \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)$  сходится абсолютно.

*Пример.* (Произведение Валлиса)  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \frac{\pi}{2}$  — получается из анализа интегралов  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

Прим. ред.: есть отличное [видео](#) с интуитивно понятным доказательством.

*Пример.* (Дзета-функция Римана)  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s > 1$

Тождество Эйлера:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{p_n^s})}, \text{ где } p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$$

## 4.3 Функциональные последовательности

### 4.3.1 Поточечная и равномерная сходимость

Пусть при всех  $n \in \mathbb{N}$  функции  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$

Говорят, что  $a \in D$  — точка сходимости  $\{f_n(x)\}$ , если последовательность  $\{f_n(a)\}$  сходится.

Множество всех точек сходимости называется множеством сходимости.

Говорят, что последовательность сходится на  $D$  поточечно, если  $D$  — множество сходимости.

Говорят, что  $f_n(x)$  сходится к  $f(x)$  равномерно на  $D$ , если  $\sup |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$

**Свойства**

1.  $f_n \xrightarrow{D} f \implies f_n \xrightarrow{D} f$

2. Если  $D = D_1 \cup D_2$ , то:

$$f_n \xrightarrow{D} f \iff (f_n \xrightarrow{D_1} f \text{ и } f_n \xrightarrow{D_2} f)$$

### 4.3.2 Равномерная норма. Критерий Коши

Рассмотрим множество всех функций  $D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

Таким образом,  $f_n \xrightarrow{D} f \iff \|f_n - f\| \rightarrow 0$

### 4.3.3 Теорема Дини

Пусть  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x)$  монотонна по  $n$  при каждом  $x \in [a, b], f_n \rightarrow f$  на  $[a, b]$

Тогда  $f_n \xrightarrow{D} f$

## 5 Лекция 5 - 29.09.2020 - Исследование сходимости функциональных рядов

### 5.1 Свойства равномерно сходящейся последовательности

1.  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , рассмотрим  $D = (a; b)$ ,  $D = [a; b]$

Пусть  $f_n \rightarrow f$ ,  $x \in D$ ,  $y_n = \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$ ,  $\{y_n\}$  – сходит.,  $y_n \rightarrow y$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ , т.е.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x))$

*Доказательство.*  $|y - f(x)| \leq |y - y_n| + |y_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$

Пусть  $n$  такое, что  $|y - y_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ ,  $\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{3}$ ,  $|x - x_0| < \delta$ ,  $|f(x) - y| < \frac{\varepsilon}{3}$

Тогда  $|y - f(x)| \leq |y - y_n| + |y_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  ■

2.  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , рассмотрим  $D = (a; b)$ ,  $D = [a; b]$

Пусть  $f_n$  дифференцируемы на  $D$ ,  $f'_n \xrightarrow{D} g$ ,  $\exists c \in D : \{f_n(c)\}$  сходит

Тогда  $\exists f : f_n \rightarrow f$  (причем, если  $D$  огр., то сходимость равномерная)

$f$  – дифференцируема,  $f' = g$ .

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

3.  $-\infty < a < b < +\infty$ ,  $D = [a; b]$

Пусть  $f_n$  непрерывны на  $D$ ,  $f_n \xrightarrow{D} f$  ( $\implies f$  непрерывна на  $D$ )

$$\text{Тогда } \int_a^x f_n(t) dt \xrightarrow{D} \int_a^x f(t) dt$$

### 5.2 Равномерная сходимость функционального ряда

$D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $a_n : D \rightarrow \mathbb{R}$

Функциональный ряд:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$

Частичные суммы:  $S_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n(x)$

Множество абсолютной сходимости – множество всех тех значений  $x$ , при которых ряд сходится абсолютно.

### 5.3 Необходимое условие равномерной сходимости

Если  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  равномерно сходится к сумме  $S(x)$ , то  $a_n \xrightarrow{D} 0$

*Доказательство.*  $S_n(x) = a_1(x) + \dots + a_n(x)$ ,  $a_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$

$$S_n \xrightarrow{D} S \implies a_n \xrightarrow{D} (S - S) = 0$$

*Пример.*  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ,  $D = \mathbb{R}$  – не является сходящейся равномерно, т.к.  $\frac{x^n}{n!} \rightarrow^{\mathbb{R}} 0$  ■

### 5.4 Критерий Коши равномерной сходимости

*Теорема 5.1.* Функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  сходится равномерно на  $D \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), \forall n \geq N, \forall m:$

$$\|a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+m}\| < \varepsilon$$

Т.е.  $|a_n(x) + a_{n+1}(x) + \dots + a_{n+m}(x)| < \varepsilon \forall x \in D$ .

Отрицание: если  $\exists\{x_n\} \subset D, \exists\{m_n\} \in \mathbb{N}, \exists\varepsilon_0$ :

$$|a_n(x_n) + a_{n+1}(x_n) + \dots + a_{m_n}(x_n)| > \varepsilon_0$$

То ряд не является сходящимся равномерно.

*Пример.*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}, D = \mathbb{R}$  – сходится, т.к.  $\approx \sum \frac{1}{n^2}$ . Докажем, что сходится неравномерно. Возьмём  $x_n = n, m_n = 2n$ :

$$\frac{n}{n^2 + n^2} + \frac{n}{n^2 + (n+1)^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + (2n)^2} > \frac{n}{5n^2} \cdot n = \frac{1}{5}$$

## 5.5 Признаки Вейерштрасса и Даламбера

**Теорема 5.2. (Признак Вейерштрасса)** Если  $|a_n(x)| \leq b_n$  при  $\forall n \geq n_0, \forall x \in D$ , а ряд  $\sum b_n$  сходится, то  $\sum a_n(x)$  сходится на  $D$  абсолютно и равномерно.

*Доказательство.*  $|a_n(x) + a_{n+1}(x) + \dots + a_{n+m}(x)| \leq b_n + b_{n+1} + \dots + b_{n+m} < \varepsilon$  ■

**Теорема 5.3. (Признак Даламбера)** Если  $\exists q < 1: |a_{n+1}(x)| \leq q \cdot |a_n(x)|$  при  $\forall n \geq n_0, \forall x \in D$ , причём  $a_{n_0}(x)$  – ограничена на  $D$ , то  $\sum a_n(x)$  сходится на  $D$  абсолютно и равномерно.

*Пример.*  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, D = [-r; r], r > 0$

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq q \cdot \left| \frac{x^n}{n!} \right|$$

$\left| \frac{x}{n+1} \right| \leq q$ . Пусть  $n_0: \frac{r}{n_0+1} < 1$ , берём  $q = \frac{r}{n_0+1}$ . Значит, ряд абсолютно и равномерно сходится.

## 5.6 Признак Лейбница

Знакопередающийся функциональный ряд:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot u_n(x), u_n(x) \geq 0$  на  $D$ .

**Теорема 5.4. (Признак Лейбница)** Если  $u_n(x) \downarrow_{(n)}$  и  $u_n \xrightarrow{D} 0$ , то ряд сходится равномерно.

*Пример.*  $\sum \frac{(-1)^n}{(n+x)^p} \downarrow_{(n)}, |u_n(x)| \leq \frac{1}{n^p} \rightarrow 0 \implies u_n \rightarrow^0 0$

## 5.7 Признаки Дирихле и Абеля

Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n x$

**Теорема 5.5. (Признак Дирихле)** Если  $a_n(x) \downarrow_{(n)}$  и  $a_n \xrightarrow{D} 0$ , а  $\|b_1 + \dots + b_n\| \leq C \forall n$ , то ряд равномерно сходится на  $D$ .

**Теорема 5.6. (Признак Абеля)** Если  $a_n(x)$  монотонна по  $n$  (при  $\forall x \in D$ ), и  $\|a_n\| \leq C$  при всех  $n$ , а ряд  $\sum b_n(x)$  сходится равномерно, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$  сходится равномерно.

## 5.8 Свойства равномерно сходящегося ряда

1.  $-\infty \leq a < b \leq +\infty, D = (a; b), D = [a; b]$

Пусть функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)$  сходится равномерно на  $D, x_0 \in D, \exists \lim_{x \rightarrow x_0} c_n(x) = y_n$  и  $\exists \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$ .

Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} c_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$

2.  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ,  $D = (a; b)$ ,  $D = [a; b]$

Пусть  $c_n(x)$  дифференцируемы на  $D$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} c'_n(x)$  сходится равномерно на  $D$ .

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)$  сходится на  $D$  (а если  $D$  огр, то сходится равномерно), а его сумма будет дифференцируемой

функцией на  $D$  и  $\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n(x)$

3.  $-\infty < a < b < +\infty$ ,  $D = (a; b)$ ,  $D = [a; b]$

$\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x c_n(t) dt$  – сходится равномерно на  $D$ .



## 6 Лекция 6 - 6.10.2020 - Степенные ряды

### 6.1 Основные понятия

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n$$

$\{c_n\}$  – числовая последовательность (коэффициенты),  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N c_n \cdot (x - x_0)^n - \text{многочлен.}$$

### 6.2 Теорема Абеля, радиус и интервал последовательности

Теорема 6.1. (Абеля)

1. Если степенной ряд сходится в точке  $x_1 \neq x_0$ , то он сходится при всех  $x : |x - x_0| < |x_1 - x_0|$
2. Если степенной ряд расходится в точке  $x_2 \neq x_0$ , то он расходится при всех  $x : |x - x_0| > |x_2 - x_0|$

Доказательство. 1.  $\left| \sum_{n=m}^N c_n (x - x_0)^n \right| = \left| \sum_{n=m}^N c_n \cdot (x_1 - x_0)^n \cdot \left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^n \right| \leq \sum_{n=m}^N |c_n \cdot (x_1 - x_0)^n| \cdot \left| \left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^n \right| \leq \varepsilon (q^m + \dots + q^N) \leq \varepsilon \cdot q^m \cdot \frac{1}{1 - q} \rightarrow 0$

Пусть:

$$R_{cv} = \sup\{|x - x_0| : \text{ряд сходится}\}$$

$$R_{dv} = \inf\{|x - x_0| : \text{ряд расходится}\} \text{ или } +\infty, \text{ если ряд сходится всюду}$$

$$\exists R = R_{cv} = R_{dv} - \text{радиус сходимости.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n$$

Применим радикальный признак Коши:

$$\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x - x_0|$$

$$\lim \sqrt[n]{|a_n(x)|} = |x - x_0| \cdot \lim \sqrt[n]{|c_n|}$$

Если  $|x - x_0| \cdot \lim \sqrt[n]{|c_n|} < 1$ , то ряд сходится

Если  $|x - x_0| \cdot \lim \sqrt[n]{|c_n|} > 1$ , то ряд расходится

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|c_n|}} - \text{формула Коши-Адамара}$$

Pro tip: если  $\exists \lim \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ , то  $\lim \sqrt[n]{|c_n|} = \lim \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$

### 6.3 Равномерная сходимость степенного ряда

Если  $R > 0$ , то степенной ряд сходится равномерно при  $|x - x_0| \leq r$ , где  $r < R$  (доказательство через признак Вейерштрасса).

### 6.4 Сходимость ряда в граничных точках интервала сходимости

Пусть  $\sum c_n R^n$  сходится. Тогда степенной ряд  $\sum c_n (x - x_0)^n$  сходится равномерно на  $[x_0; x_0 + R]$ .

Доказательство.  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cdot R^n) \cdot \left( \frac{x - x_0}{R} \right)^n$

$$b_n = c_n \cdot R^n, a_n = \left( \frac{x - x_0}{R} \right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ сходится} \implies \text{сходится равномерно.}$$

$$a_n(x) \downarrow_{(n)}$$

Значит, ряд сходится равномерно по признаку Абеля.

## 6.5 Дифференцирование и интегрирование степенного ряда

$\sum c_n(x - x_0)^n$ ,  $R > 0$  – его радиус сходимости.

### 1. Дифференцирование

При почленном дифференцировании получаем  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1}$  Его радиус сходимости равен радиусу исходного ряда  $\implies$  он сходится равномерно при  $|x - x_0| \leq r < R$  Значит по теореме о почленном дифференцировании

функционального ряда:  $\left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (n+1) (x - x_0)^n$

### 2. Интегрирование

$$\int_{x_0}^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - x_0)^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$$

## 6.6 Бесконечное дифференцирование

Функция называется бесконечно дифференцируемой в точке  $a$ , если  $\forall n$  она  $n$  раз дифференцируема в точке  $a$ . Сумма степенного ряда с  $R > 0$  является бесконечно дифференцируемой функцией.

## 6.7 Ряд Тейлора

Если функция  $f(x)$  бесконечно дифференцируема в точке  $x_0$ , то функции  $f(x)$  можно сопоставить её ряд Тейлора:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

При этом  $f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + r_N(x)$

$$r_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(x_0 + \theta)(x - x_0)}{(N+1)!} (x - x_0)^{N+1}, \theta \in (0; 1) \text{ – формула Лагранжа}$$

$$r_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(x_0 + \theta)(x - x_0)}{N!} (1 - \theta)^N (x - x_0)^{N+1}, \theta \in (0; 1) \text{ – формула Коши}$$

*Определение 7.* Функция называется аналитической в т. $x_0$ , если она представима в окрестности этой точки в виде степенного ряда.

Не всякая бесконечно дифференцируемая функция будет аналитической:

$$\text{Пример. } f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = 0$ , ряд Тейлора при  $x_0 = 0$  равен 0

### 6.7.1 Ряды Тейлора основных элементарных функций

$$1. e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, R = \infty$$

$$2. (1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p)_n}{n!} x^n, \text{ где } (p)_n = p(p-1)\dots(p-n+1), R = 1$$

$$3. \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)} x^n}{n!}$$

## 7 Лекция 7 - 27.10.2020 - Мера Жордана

### 7.1 Мера на кольце множеств

*Определение 8.* Пусть  $\mathcal{F}$  – некоторое семейство подмножеств множества  $X$ , т.е.  $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ . Функция  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0; +\infty)$  называется мерой на  $\mathcal{F}$ , если она обладает свойством аддитивности:

$$\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Множество  $\mathcal{F}$  называется кольцом, если:

1.  $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. Если  $A, B \in \mathcal{F}$ , то  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  и  $A \setminus B$  содержатся в  $\mathcal{F}$

Свойства меры на кольце:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$
3.  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

### 7.2 Ограниченные полуинтервалы в $\mathbb{R}^m$

$\mathbb{R}$ :  $[a; b)$

$\mathbb{R}^2$ :  $[a; b) \times [c; d)$

$\mathbb{R}^m$ :  $[a^1; b^1) \times [a^2; b^2) \times \dots \times [a^m; b^m)$ ,  $a = (a^1, \dots, a^m)$ ,  $b = (b^1, \dots, b^m) \in \mathbb{R}^m$

$[a; a) = \emptyset$

$\mathbb{R}$ :

Пересечение двух полуинтервалов – полуинтервал.

Разность двух полуинтервалов – полуинтервал или объединение двух непересекающихся полуинтервалов.

$\mathbb{R}^n$ :

Разность двух полуинтервалов есть объединение не более, чем  $2m$  дизъюнктивных полуинтервалов.

### 7.3 Кольцо простых множеств

*Определение 9.* Простым множество называется объединением конечного числа полуинтервалов:

$$E = \bigcup_{i=1}^n E_i = \bigcup_{i=1}^n [a_i; b_i)$$

Простые множества образуют кольцо:

$\emptyset = [a; a)$  – простое.

$E_1, E_2$  – простые, то:  $E_1 \cup E_2$  – простое,  $E_1 \cap E_2$  – простое,  $E_1 \setminus E_2$  – простое.

$$E = \bigcup_{i=1}^n E_i = E_i \sqcup (E_2 \setminus E_1) \sqcup (E_3 \setminus E_1 \setminus E_2 \sqcup \dots)$$

$E$  представимо в виде объединения дизъюнктивных полуинтервалов:  $E = \bigsqcup_{j=1}^m [a_j; b_j)$

$\mu([a; b]) = (b^1 - a^1) \cdot (b^2 - a^2) \cdot \dots \cdot (b^m - a^m)$ , где все  $b^i \geq a^i$

$$\mu(E) = \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^m [a_j; b_j)\right) = \sum_{j=1}^m \mu([a_j; b_j))$$

## 7.4 Внешняя $m$ -мерная мера Жордана

$A \subset \mathbb{R}^m$ ,  $A$  – ограниченное множество.

Внешней мерой Жордана множества  $A$  называется  $\bar{\mu}(A) = \inf_{E, A \subseteq E} \mu(E)$

Свойства внешней меры:

1.  $\bar{\mu}(\emptyset) = 0$
2.  $A \subseteq B \implies \bar{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(B)$

*Доказательство.* Т.к.  $\forall E, B \subseteq E \implies A \subseteq E$ , т.е. при вычислении  $\bar{\mu}(A)$  inf берётся по более широкому классу множеств  $E$ . ■

3.  $\bar{\mu}(A \cup B) \leq \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B)$

*Доказательство.*  $A \subseteq E_1, B \subseteq E_2 \implies A \cup B \subseteq E_1 \cup E_2$

$$\bar{\mu}(A \cup B) \leq \mu(E_1 \cup E_2) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2) \leq \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B) \quad \blacksquare$$

4. Внешняя мера не обладает свойством аддитивности

## 7.5 Измеримость по Жордану

*Определение 10.* Ограниченное множество  $A \subset \mathbb{R}^m$  называется измеримым по Жордану, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists E, A \subseteq E: \bar{\mu}(E \setminus A) < \varepsilon$

1.  $\emptyset$  – измеримо
2.  $A, B$  – измеримы  $\implies A \cup B, A \cap B, A \setminus B$  – измеримы

Значит, измеримые множества образуют кольцо.

На кольце измеримых множеств внешняя мера аддитивна.

*Определение 11.* Рассмотрим теперь  $E \subseteq A$ , тогда  $\underline{\mu}(A) = \sup_{E \subseteq A} \mu(E)$  – внутренняя мера  $A$ .

Множество  $A$  измеримо  $\iff \bar{\mu}(A) = \underline{\mu}(A)$

$\partial A$  – граница множества  $A$ .

Если  $E_1 \subseteq A \subseteq E_2$ , то  $\partial A \subseteq E_2 \setminus E_1$ .

Если  $A$  – измеримо, то  $\bar{\mu}(\partial A) = 0$

## 7.6 Интегрируемость функции по Риману и измеримость по Жордану её подграфика

$f(x) \geq 0$  на  $[0; 1]$

$A = \{(x, y) | 0 \leq y \leq f(x), x \in [0; 1]\}$  – подграфик функции  $f$ .

Функция  $f$  интегрируема на  $[0; 1] \iff A$  измеримо по Жордану, причём  $\mu(A) = \int_0^1 f(x) dx$