ТВИМС. Коллоквиум 2

1. Теорема Пуассона. Задача про булочки с изюмом.

   Теорема Муавра-Лапласа даёт крутое приближение при большом npq. Рассмотрим серию испытаний по схеме Бернулли, при этом пусть N-я серия состоит из N испытаний, а вероятность успеха в этой серии равна p_N. Потребуем, чтобы $N \cdot p_N = \lambda$ не зависело от N. Нас интересует вероятность $P(S_N = k)$ наступления ровно k успехов в N-й серии.

   Теорема Пуассона. Пусть $N \cdot p_N = \lambda$ не зависит от N. Тогда:

   $$P(S_N = k) = C_N^k p_N^k (1-p_N)^{N-k} \xrightarrow{N\to+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

   Доказательство. Вспомним что $N \cdot p_N = \lambda \implies p_N = \dfrac{\lambda}{N}$. Распишем:

   $$\begin{aligned} P(S_n = k) = C_N^k p_N^k (1-p_N)^{N-k} &= \frac{N!}{(N-k)! \cdot k!} \cdot \frac{\lambda^k}{N^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-k+1)}{N^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{-k} \xrightarrow[\lambda, k \text{ постоянны}]{N\to+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \end{aligned}$$

   Задача. Сколько изюма должны содержать в среднем булочки, чтобы вероятность иметь хотя бы одну изюминку в булочке была не меньше 0.99?

   Пусть заготовлено тесто, в которое добавили N изюминок, и λ — среднее количество изюма на булку. Тогда у нас должно получиться $\dfrac{N}{\lambda}$ булок. Возьмем кусок теста, из которого должна сготовиться булка. Вероятность конкретной изюмины попасть в этот кусок — $\dfrac{\lambda}{N}$. Тогда $1 - \left(1 - \dfrac{\lambda}{N}\right)^N$ — вероятность что хотя бы одна изюминка попадет в булку.

   Считаем производство серийным, поэтому можем считать $N \to +\infty$ (растет кол-во теста и изюма, но λ постоянная). Имеем $\left(1 - \dfrac{\lambda}{N}\right)^N \to e^{-\lambda}$. Тогда нужно решить $1 - e^{-\lambda} \geqslant 0.99$, то есть просто $e^{-\lambda} \leqslant 0.01$. $\lambda = 5$, к примеру, подходит.

2. Модель Эрдеша-Реньи случайного графа. Теорема о надежности сети.

   Модель Эрдеша-Реньи. Пусть у нас есть n вершин. Между каждой парой вершин проводим ребро с вероятностью p независимо от остальных пар. Получившийся граф называется случайным графом в модели Эрдеша-Реньи. Нас будет интересовать вероятность того, что граф связен. Имеет место следующий результат.

   Теорема о надежности сети. Если $p = \dfrac{c \ln n}{n}$, то при $c > 1$ вероятность того, что граф связен, стремится к 1, а при $c < 1$ — к 0. Докажем более грубое утверждение: при $p = \dfrac{c \ln n}{n}, c > 2$ граф почти всегда связен.

   Доказательство. Пусть X_n — случайная величина равная кол-ву компонент связности, если граф не связен и 0, если связен. Нужно доказать $P(X_n \geqslant 1) \to 0$ при $n \to \infty$. По неравенству Чебышёва:

   $$P(X_n \geqslant 1) \leqslant \mathbb{E}X_n$$

   Пусть $X_{n,k,i}$ — случайная величина, принимающая 1, если i-е k-элементное подмножество множества вершин (мощности n) является КС в нашем графе и 0 иначе. Понятно что:

   $$\mathbb{E}X_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{C_n^k} \mathbb{E}X_{n,k,i}$$

$\mathbb{E}X_{n,k,i} = P(X_{n,k,i} = 1)$, а эту вероятность можно оценить сверху тем, что k вершин из i-го k-элементного подмножества не соединены с остальными. Обозначим $q = 1 - p$. Имеет место оценка:

$$\mathbb{E}X_n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k q^{k(n-k)}$$

Эта сумма симметрична, поэтому можно суммировать по $k \leqslant \frac{n}{2}$, а потом удвоить (будет оценкой сверху, тк при четных n слагаемое в середине посчитаем 2 раза). При этом $k \leqslant \frac{n}{2} \implies k(n-k) \geqslant \frac{kn}{2} \implies q^{k(n-k)} \leqslant q^{\frac{kn}{2}}$ (тк $q < 1$). Там мы в процессе еще накинем доп. слагаемых, но пофиг, оценка ведь сверху. Ну погнали:

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k q^{k(n-k)} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (q^{n/2})^k = 2(1+q^{n/2})^n - 2 - 2q^{n^2/2}$$

В последнем переходе мы воспользовались биномом Ньютона. По условию $q = 1 - \frac{2a\ln n}{n}$, $a > 1$. Осталось разобраться с $q^{n/2}$:

$$\begin{aligned} q^{n/2} &= \exp\left(\frac{n}{2}\cdot\ln\left(1 - \frac{2a\ln n}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{n}{2}\cdot\left(-\frac{2a\ln n}{n} + [\text{Тейлор начиная с } n^2 \text{ в знаменателе}]\right)\right) \\ &= \exp\left(-a\ln n + \beta_n\right) = \frac{1}{n^a}e^{\beta_n}, \beta_n \to 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1+q^{n/2})^n &= \left(1 + \frac{1}{n^a}e^{\beta_n}\right)^n = \exp\left(n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n^a}e^{\beta_n}\right)\right) = \exp\left(n\cdot\left(\frac{1}{n^a}e^{\beta_n} + o\left(\frac{1}{n^a}\right)\right)\right) = \exp(n^{1-a}e^{\beta_n} + o(1)) \\ &= \exp(o(1)) \to 1 \end{aligned}$$

$q^{n^2/2} = (q^{n/2})^n$, а $q^{n/2} \to 0$, как было показано выше. Поэтому $2(1+q^{n/2})^n - 2 - 2q^{n^2/2} \to 2 - 2 - 0 = 0$. Получаем $\mathbb{E}X_n \to 0 \implies P(X_n \geqslant 1) \to 0$.

3. Вероятностное пространство в общем случае: алгебра и σ-алгебра подмножеств. Примеры σ-алгебр, σ-алгебра, порожденная системой подмножеств, борелевская σ-алгебра.

   Класс $\mathcal{A}_0$ подмножеств пространства Ω называется **алгеброй**, если

   (i) $\Omega, \varnothing \in \mathcal{A}_0$

   (ii) $A \in \mathcal{A}_0 \implies \Omega \setminus A \in \mathcal{A}_0$

   (iii) $A, B \in \mathcal{A}_0 \implies A \cup B, A \cap B \in \mathcal{A}_0$

   Класс $\mathcal{A}$ подмножеств пространства Ω называется **σ-алгеброй**, если

   (i) $\Omega, \varnothing \in \mathcal{A}_0$

   (ii) $A \in \mathcal{A}_0 \implies \Omega \setminus A \in \mathcal{A}_0$

   (iii') $A_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N} \implies \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n,\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

   Примеры: 2^Ω, $\{\varnothing, \Omega\}$, $\{\varnothing, A, \Omega\setminus A, \Omega\}$. А вот множество конечных объединений непересекающихся полуинтервалов являются алгеброй, но не являются σ-алгеброй (в них нет точек, которые можно получить счетным пересечением).

   Говорят, что σ-алгебра **порождена набором множеств** S, если эта σ-алгебра является наименьшей по включению среди всех σ-алгебр, которые содержат данный набор множеств S. Обозначение: $\sigma(S)$.

   Заметим, что $\sigma(S)$ определена для произвольного S: пересечение произвольного набора σ-алгебр оказывается опять σ-алгеброй. Докажем это, проверив свойства:

   Пусть $\sigma(S) = \bigcap\limits_{\mathcal{A}\ \sigma\text{-алгебра},\ S\subseteq\mathcal{A}} \mathcal{A}$.

   (i) $\varnothing, \Omega \in \sigma(S)$, тк принадлежат любой $\mathcal{A}$

(ii) $A \in \sigma(S) \implies \forall \mathcal{A}\ A \in \mathcal{A} \implies \forall \mathcal{A}\ \Omega \setminus A \in \mathcal{A} \implies \Omega \setminus A \in \sigma(S)$

(iii') Задерусь техать, поэтому словами: если набор подмножеств лежит в $\sigma(S)$, то он лежит в каждой $\mathcal{A}$, поэтому пересечение/объединение таких наборов лежит в каждой $\mathcal{A}$ (ведь $\mathcal{A}$ — σ-алгебра), значит, пересечение/объединение лежит в $\sigma(S)$. Ну а вообще по аналогии с (ii).

А значит, $\sigma(S)$ это просто пересечение всех σ-алгебр, содержащих S. И хотя бы одна такая σ-алгебра есть: например, 2^Ω.

Борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(a,b],[a,b),(a,b),[a,b] : a,b \in \mathbb{R}\})$$

Но вообще можно определять так: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\})$ (то есть как порождающее множество брать просто лучи). Для этого нужно доказать включение в обе стороны:

- $(-\infty, c] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [-n, c] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \implies \sigma(\{(-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$
- $(a,b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a]$, дальше получить отрезок, интервал и полуинтервал в другую сторону, доказали $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\{(-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\})$. Подробнее с 1:10:00 в лекции 9.

Борелевскую σ-алгебру можно определять и для $\mathbb{R}^n$, отрезков и прочей нечисти: просто берем все возможные промежутки с координатами концов из заданного множества.

4. Аддитивные и счётно аддитивные функции множества на алгебрах и σ-алгебрах. Вероятностная мера и определение вероятностного пространства. Эквивалентность счетной аддитивности и непрерывности в нуле для неотрицательной аддитивной функции множества на алгебре. Свойства непрерывности вероятностной меры.

Определение. Пусть $\mathcal{A}_0$ — алгебра. Функция $P : \mathcal{A}_0 \to [0,1]$ называется **аддитивной**, если для произвольных непересекающихся $A, B \in \mathcal{A}_0$ выполнено

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Определение. Функция $P : \mathcal{A}_0 \to [0,1]$ называется **счетно аддитивной**, если для всякого не более чем счетного набора попарно непересекающихся событий $A_n \in \mathcal{A}_0$ для которых $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_0$ выполняется

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_n)$$

Определение. Пусть $\mathcal{A}$ — σ-алгебра. Функция $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ называется **вероятнтостной мерой**, если $P(\Omega) = 1$ и P счётно аддитивна на $\mathcal{A}$.

Определение. Тройку $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ называют **вероятностным пространством**.

Предложение. Пусть $P : \mathcal{A}_0 \to [0,1]$ — аддитивная функция на алгебре $\mathcal{A}_0$. P счётно аддитивна на $\mathcal{A}_0$ тогда и только тогда, когда для произвольного набора $A_n \in \mathcal{A}_0, A_n \supseteq A_{n+1}, \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$ выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

Доказательство. Пусть P счётно аддитивна на $\mathcal{A}_0$. Рассмотрим последовательность $C_n = A_n \setminus A_{n+1}$. Тогда $A_k = \bigsqcup\limits_{i=k}^{\infty} C_i$ и $P(A_1) = \sum\limits_{i=1}^{N} P(C_i) + P(A_{N+1})$. Так как $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{N} P(C_i) = P(A_1)$, $\lim\limits_{N\to\infty} P(A_{N+1}) = 0$ (это по сути остаток ряда).

В другую сторону: пусть у нас есть набор непересекающихся $C_n \in \mathcal{A}_0$, при этом $\bigcup\limits_{i=k}^{\infty} C_i = A_k$, а $A_1 \in \mathcal{A}_0$. Тогда $A_N \supseteq A_{N+1}$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$. Пустоту пересечения докажем от противного: если бы элемент лежал в каком-то C_k (k определено однозначно, тк C_n не пересекаются), то начиная с A_{k+1} элемент убрался бы из пересечения. Получаем $P(A_1) = \sum\limits_{i=1}^{N} P(C_i) + P(A_{N+1})$, но тк $P(A_{N+1}) \to 0$, переходя к пределу, получаем $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(C_i) = P(A_1)$. ■

Свойства непрерывности вероятностной меры. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство. Тогда:

(i) $A_n \in \mathcal{A}, A_{n+1} \subseteq A_n, A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \implies \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$

Доказательство. Рассмотрим $A'_n = A_n \setminus A$. Очевидно, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A'_i = \varnothing \implies \lim\limits_{n\to\infty} P(A'_n) = 0$. В то же время $P(A_n) = P(A'_n \sqcup A) = P(A'_n) + P(A)$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$ ■

(ii) $A_n \in \mathcal{A}, A_n \subseteq A_{n+1}, A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \implies \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.

Доказательство. Рассмотрим $A'_n = \Omega \setminus A_n$. Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A'_n = \Omega \setminus A$. По п. 1:

$$1 - P(A) = P(\Omega \setminus A) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A'_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A'_n) = \lim_{n\to\infty} P(\Omega \setminus A_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

■

5. Случайные величины на общих вероятностных пространствах: определение и основные свойства (прообраз борелевских лежит в σ-алгебре, сумма и произведение случайных величин — случайная величина, предел случайных величин — случайная величина).

Определение. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пр-во. Функцию $X : \Omega \to \mathbb{R}$ называют **случайной величиной**, если $\forall t\ \{w : X(w) \leqslant t\} \in \mathcal{A}$.

Предложение. Пусть X — случайная величина на вероятностном пр-ве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Тогда $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \implies X^{-1}(B) = \{w : X(w) \in B\} \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Возьмем $\mathcal{C} = \{B : X^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. Во-первых, $\forall c\ X^{-1}((-\infty, c]) \in \mathcal{A} \implies (-\infty, c] \in \mathcal{C}$ (по определению случайной величины). Если докажем, что $\mathcal{C}$ — σ-алгебра, то победили, ведь $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — наименьшая σ-алгебра, содержащая все лучи $(\infty, c]$. Ну проверим по свойствам:

(i) $X^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{A} \implies \varnothing \in \mathcal{C}$; $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega \in \mathcal{A} \implies \mathbb{R} \in \mathcal{C}$

(ii) $A \in \mathcal{C} \implies X^{-1}(A) \in \mathcal{A} \implies \Omega \setminus X^{-1}(A) \in \mathcal{A} \implies X^{-1}(\mathbb{R} \setminus A) \in \mathcal{A} \implies \mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{C}$

(iii)' $\forall n\ A_n \in \mathcal{C} \implies \forall n\ X^{-1}(A_n) \in \mathcal{A} \implies \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X^{-1}(A_n) \in \mathcal{A} \implies X^{-1}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) \in \mathcal{A} \implies \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}$; с пересечением аналогично

Итак, получили, что $\mathcal{C}$ — σ-алгебра, так еще и содержит все лучи $(-\infty, c]$. Значит, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}$. ■

Предложение. Пусть X, Y — случайные величины. Тогда $\alpha X + \beta Y$ — случайная величина.

Доказательство. Начнем с того, что αX — случайная величина. Действительно:

$$\alpha X \leqslant t \iff \begin{cases} X \leqslant \frac{t}{\alpha}, \alpha > 0 \\ X \geqslant \frac{t}{\alpha}, \alpha < 0 \end{cases}$$

Разве что в случае отрицательных α, нам нужны лучи не в $-\infty$ как обычно, а наоборот, но прообраз борелевских лежит в $\mathcal{A}$, поэтому всё ок. А в случае когда $\alpha = 0$, это константа, тоже случайная величина.

Тогда достаточно доказать, что $X + Y$ — случайная величина. Нужно $\forall t\ \{w : X(w) + Y(w) \leqslant t\} = \Omega \setminus \{w : X(w) + Y(w) > t\} \in \mathcal{A}$. Имеем:

$$\{w : X(w) + Y(w) > t\} = \{w : X(w) > t - Y(w)\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} [\{w : X(w) > q\} \cap \{w : q > t - Y(w)\}] \in \mathcal{A}$$

Ведь $\mathbb{Q}$ — всюду плотное множество. Каждое из множеств под объединением лежит в $\mathcal{A}$ (как прообраз борелевских), их пересечение тоже, а значит, и счетное объединение. Поэтому $\{X + Y > t\} \in \mathcal{A} \implies \{X + Y \leqslant t\} \in \mathcal{A} \implies X + Y$ — случайная величина. ■

Предложение. Пусть X и Y — случайные величины. Тогда $X \cdot Y$ — случайная величина.

Доказательство. Заметим, что $X \cdot Y = \dfrac{1}{2}((X+Y)^2 - X^2 - Y^2)$. Докажем что X^2 это случайная величина и мы в шоколаде. Ну заметим, что $t < 0 \implies \{w : X^2(w) \leqslant t\} = \varnothing \in \mathcal{A}$. А если $t \geqslant 0$, то $X^2 \leqslant t \iff X \in [-\sqrt{t}, \sqrt{t}]$. Это борелевская штука, ее прообраз лежит в $\mathcal{A}$. Победа. ■

Предложение. Пусть $\forall w\ X_n(w) \to X(w)$, то есть последовательность случайных величин X_n поточечно сходится к X. Тогда X — случайная величина.

Доказательство. Заметим, что $[\lim X_n(w) \leqslant t] \iff \left[\forall k \exists N : \forall n \geqslant N \implies X_n(w) \leqslant t + \dfrac{1}{k}\right]$. Тогда:

$$\{w : X(w) \leqslant t\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{w : X_n(w) \leqslant t + \frac{1}{k}\right\}$$

Каждое из множеств принадлежит $\mathcal{A}$, а значит, и их счётный флекс тоже лежит, то есть X — случайная величина. ■